Mathematik Lösungen 3.12

1.) Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = x^3 \cdot y^2 \cdot \left(1 - x - y\right)$ auf (lokale) Extrema.

$$f(x,y) = x^3 \cdot y^2 \cdot (1-x-y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$$

$$f_x = 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = x^2y^2(3 - 4x - 3y)$$

$$f_y = 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = x^3y(2 - 2x - 3y)$$

$f_x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $y = 0$ oder $y = 1 - \frac{4}{3}x$

$f_y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $y = 0$ oder $y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x$

$$f_{xx} = 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3$$

$$f_{yy} = 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y$$

$$f_{xy} = 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2$$

$x = 0$ oder $y = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ (keine Extremalstelle)

$\Rightarrow f_x = 0 = f_y \Rightarrow 1 - \frac{4}{3}x = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{3}x$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}, \; y = \frac{1}{3}$

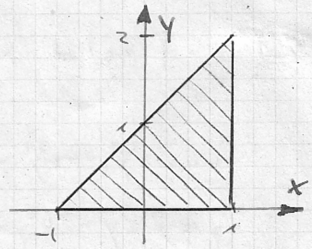
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9} \\ f_{yy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{8} \\ f_{xy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{12} \end{array}\right\} \Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \text{ ist ein lokales Maximum}}$

2.) Bestimmen Sie die <u>absoluten</u> Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - \frac{5y}{2}$

im Definitionsgebiet : $\boldsymbol{D} = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \mid -1 \le x \le 1 \quad \wedge \quad 0 \le y \le x+1 \right\}$

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - \frac{5}{2}y$



$f_x = 2x + y - 2 \quad , \quad f_{xx} = 2$
$f_y = x + 2y - \frac{5}{2} \quad , \quad f_{yy} = 2$
$f_{xy} = 1$

$f_x = 0 = f_y \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - \frac{5}{2} = 0 \end{array}\right\} \quad 2 - 2x = -\frac{x}{2} + \frac{5}{4}$

$\frac{3}{4} = \frac{3}{2}x$

$\Rightarrow \underline{x = \frac{1}{2} \,,\, y = 1} \quad \Rightarrow \Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 - 1 = 3 > 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \text{ ist ein lokales absolutes Minimum mit } f\left(\tfrac{1}{2},1\right) = -\tfrac{7}{4}}$

Ränder: $y = 0 \Rightarrow f_1(x) = x^2 - 2x \quad , \quad \frac{df_1}{dx} = 2x - 2 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow$ <u>$(1,0)$ ist lok. Minimum mit $f = -1$</u>

$x = 1 \Rightarrow f_2(y) = 1 + y + y^2 - 2 - \frac{5}{2}y$

$0 = \frac{df_2}{dy} = 1 + 2y - \frac{5}{2} \Leftrightarrow y = \left(\frac{5}{2} - 1\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ <u>$(1, 3/4)$ ist lok. Minimum mit $f = -1{,}5625$</u>

$y = 1 + x \Rightarrow f_3(x) = x^2 + x(1+x) + (1+x)^2 - 2x - \frac{5}{2}(1+x)$
$= x^2 + x + x^2 + 1 + 2x + x^2 - 2x - \frac{5}{2} - \frac{5x}{2} = 3x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

$0 = \frac{df_3}{dx} = 6x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow$ <u>$\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ ist lok. Minimum mit $f = -1{,}6875$</u>

Eckpunkte: $\boxed{(-1,0) \text{ mit } f(-1,0) = 3 \quad \text{absolutes Maximum}}$

$f(1,0) = -1, \quad f(1,2) = 0$

3.) An einem Tennisturnier nehmen 10 Spieler teil. Wie viele verschiedene Paarungen sind für die erste Runde möglich ?

$9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 945$

4.) a.) Ein Parallelrechner mit $n = 4$ Prozessoren muss $k = 10$ nicht voneinander unterscheidbare Jobs bearbeiten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Prozessor 3 Jobs, der zweite 4, der dritte 2 und der vierte 1 Job zugeteilt erhält ?

b.) Wiederholen Sie die Aufgabe unter der Voraussetzung, dass alle Jobs voneinander unterscheidbar sind.

a.) P J J J P J J J J P J J P J $\quad \binom{n+k-1}{k}$

↑ fix am Anfang

$$\Rightarrow \binom{13}{10} = \binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 286$$

$$p = \frac{1}{286} \approx 0{,}35\,\%$$

b.)

$$\frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1}}{4^{10}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4^{10}}$$

$$= \frac{12\,600}{1048576} = 0{,}012 = 1{,}2\,\%$$

5.) Mit einem Würfel wird zweimal gewürfelt. Zeigen Sie, dass je zwei der folgenden drei Ereignisse stochastisch unabhängig sind :

A : Augenzahl 3 im ersten Wurf
B : Augenzahl 4 im zweiten Wurf
C : Summe der Augenzahlen ist 7

Sind alle drei Ereignisse stochastisch unabhängig ?

$$A = \{(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6)\}$$
$$B = \{(1,4);(2,4);(3,4);(4,4);(5,4);(6,4)\}$$
$$C = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}$$

$$A \cap B = \{(3,4)\} = A \cap C = B \cap C$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C) \end{aligned}\right\} \text{ paarweise stochastisch unabhängig}$$

aber $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

→ A, B und C sind stochastisch abhängig !!!

6.) Lösen Sie die Anfangswertprobleme :

a.)

$$u(t) - v(t) + \frac{dw(t)}{dt} = 2 \cdot e^t$$
$$u(t) + \frac{dv(t)}{dt} - w(t) = 2 \cdot e^t \qquad \text{mit} \qquad u(0) = 3,\; v(0) = -1,\; w(0) = 4 .$$
$$\frac{du(t)}{dt} - \frac{dv(t)}{dt} - \frac{dw(t)}{dt} = 0$$

	u	$\dot u$	$\ddot u$	v	$\dot v$	$\ddot v$	w	$\dot w$	$\ddot w$	$= f(t)$
I	1			−1				1		$2e^t$
II	1				1		−1			$2e^t$
III		1			−1			−1		0
$\dot{\text{I}}$		1			−1				1	$2e^t$
								1	1	$2e^t$

$$\ddot w + \dot w = 2e^t$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda \cdot (\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0,\ \lambda = -1$$

$$w_h(t) = C_1 + C_2 \cdot e^{-t}$$
$$w_p = A_1 \cdot e^t \Rightarrow \dot w_p = \ddot w_p = w_p = A_1 \cdot e^t$$
$$\Rightarrow A_1 = 1$$

$$\Rightarrow \underline{w(t) = C_1 + C_2 \cdot e^{-t} + e^t}$$

$$u + \dot u = w + \dot w + 2e^t = \underbrace{C_1 + \cancel{C_2 e^{-t}} + e^t - \cancel{C_2 e^{-t}} + e^t + 2e^t}_{C_1 + 4e^t}$$

$$u_h(t) = C_3 \cdot e^{-t}$$

$$\left.\begin{aligned} u_p &= A_1 + A_2 \cdot e^t, \\ \dot u_p &= A_2 \cdot e^t \end{aligned}\right\} \quad A_1 = C_1,\ A_2 = 2$$

$$\underline{u(t) = C_3 \cdot e^{-t} + C_1 + 2 \cdot e^t}$$

$$v(t) = u + \dot w - 2e^t = C_3 e^{-t} + C_1 + \cancel{2e^t} - \cancel{2e^t} - C_2 e^{-t} + e^t$$

$$\underline{v(t) = (C_3 - C_2) e^{-t} + C_1 + e^t}$$

Randbed.:
$$\begin{aligned} +C_1 + C_2 + \cancel{1} &= \cancel{4}\,3 \\ +C_1 - C_2 + C_3 &= -2 \\ -C_1 \qquad\quad C_3 &= 1 \\ \hline C_1 \qquad\qquad &= 0,\ C_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= e^{-t} + 2e^t \\ v(t) &= -2e^{-t} + e^t \\ w(t) &= 3e^{-t} + e^t \end{aligned}}$$

b.) $\ddot{u} - u + 5\dot{v} = 3t$, $2\dot{u} - \ddot{v} + 4v = 6$ mit $u(0) = \dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$ und $v(0) = 3$.

	u	$\dot{u}$	$\ddot{u}$	$\dddot{u}$	$\ddddot{u}$	v	$\dot{v}$	$\ddot{v}$	$\dddot{v}$	$= f(t)$	
I	-1		1				5			$3t$	-4
II		2				4		-1		6	5
$\dot{\text{I}}$		-1		1				5		3	
IV		9		1		20				33	
$\dot{\text{IV}}$			9		1		20			0	
	4		5		1					$-12t$	

$$\ddddot{u} + 5\ddot{u} + 4u = -12t$$

$$\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = (\lambda^2+4)(\lambda^2+1) = 0 \quad \begin{array}{l} \lambda_{1/2} = \pm i2 \\ \lambda_{3/4} = \pm i \end{array}$$

$$\Rightarrow u_h(t) = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cos t + C_3 \sin 2t + C_4 \cos 2t$$

$$\left.\begin{array}{l} u_p = A_1 t + A_0 \\ \dot{u}_p = A_1 \\ \ddot{u}_p = 0 \end{array}\right\} \quad 4A_1 t + 4A_0 = -12t$$

$$\Rightarrow A_0 = 0 \qquad \Rightarrow A_1 = -3$$

$$\Rightarrow \underline{u(t) = -3t + C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 \sin 2t + C_4 \cos 2t}$$

$$u(0) = C_2 + C_4 = 0$$

$$\dot{u}(0) = -3 + C_1 + 2C_3 = 0$$

$$v(t) = \frac{1}{20}\left(33 - 9\dot{u} - \dddot{u}\right)$$

$$= \frac{1}{20}\Big(33 - 9\left(-3 + C_1 \cos t - C_2 \sin t + 2C_3 \cos 2t - 2C_4 \sin 2t\right) - \left(-C_1 \cos t + C_2 \sin t - 8C_3 \cos 2t + 8C_4 \sin 2t\right)\Big)$$

$$\underline{v(t) = 3 - \frac{8}{20} C_1 \cos t + \frac{8}{20} C_2 \sin t - \frac{10}{20} C_3 \cos 2t + \frac{10}{20} C_4 \sin 2t}$$

$$v(0) = 3 - \frac{8}{20} C_1 - \frac{10}{20} C_3 = 3 \qquad \Rightarrow \cancel{C_1 = -\frac{5}{4} C_3 = -2C_3}$$

$$\dot{v}(0) = \frac{8}{20} C_2 + C_4 = 0 \qquad \Rightarrow \underbrace{C_1 = -\frac{5}{4} C_3 = 3 - 2C_3}$$

$$-5C_3 = 12 - 8C_3$$

$$\Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$3C_3 = 12$$

$$\Rightarrow C_3 = 4$$

$$\Rightarrow C_1 = -5$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u(t) = -3t - 5 \sin t + 4 \sin 2t}}$$

$$\underline{\underline{v(t) = 3 + 2 \cos t - 2 \cos 2t}}$$