Mathematik Lösungen 3.13

Name :

Punkte:

1.) Bestimmen Sie das Lagrange Polynom durch die Punkte

$$(0\,,0)\;,\quad(1\,,1)\;,\quad(2\,,2)\;,\quad(3\,,1)\;,\quad(4\,,0)\quad.$$

Vgl. Maple–Vorlage

2

2.) Bestimmen Sie das fünfte Taylor Polynom von

$$f(t)=\ln(t)+\frac{3}{2}\cdot\left(t^2-1\right)\qquad\text{bezüglich}\qquad t_0=1$$

und geben Sie mit dem Taylor'schen Satz eine obere Schranke an für den Fehler $\left|\,f(1.5)-P_5(1.5)\,\right|$.

Vgl. Maple–Vorlage

3

3.) Lösen Sie das Anfangswertproblem :

$$y'-x\,y'-y+(x-1)^2=0\qquad\text{mit}\qquad y(2)=0\qquad\text{für}\quad x\geq 2\,.$$

5

$y'(1-x)-y+(x-1)^2=0$ $\qquad y(2)=0$, $x\geq 2$

$y'+\frac{1}{x-1}y=x-1$ $\quad$ 0,5 $\quad$ (für $x\neq 1$)

lineare DG 1. Ordnung

$F(x)=\int\frac{1}{x-1}\,dx=\ln|x-1|$ $\qquad$ nur Stammfkt.

für $x\geq 2\Rightarrow F(x)=\ln(x-1)$ $\quad$ ~~1~~ 0,5

$\Rightarrow$ hom. Lös.: $\quad y_h(x)=C\cdot e^{-F(x)}=C\cdot e^{-\ln(x-1)}=\frac{C}{x-1}$ $\quad$ 0,5

keine Resonanz

$\Rightarrow C(x)=\int(x-1)\cdot e^{F(x)}\cdot dx=\int(x-1)\cdot(x-1)\cdot dx$ $\quad$ 0,5

$C(x)=\frac{(x-1)^3}{3}$ $\quad$ 0,5 $\quad$ (nur Stammfkt.)

$\Rightarrow$ part. Lös.: $\quad y_p(x)=C(x)\cdot e^{-F(x)}=\frac{(x-1)^3}{3}\,\frac{1}{x-1}$

$y_p(x)=\frac{(x-1)^2}{3}$ $\quad$ 0,5

allg. Lösung: $\quad \underline{\underline{y(x)=\frac{C}{x-1}+\frac{(x-1)^2}{3}}}$ $\quad$ 0,5

spez. Lös.: $\quad 0\overset{0,5}{=}y(2)=\frac{C}{1}+\frac{1}{3}\Rightarrow \underline{C=-\frac{1}{3}}$ $\quad$ 0,5

$\underline{\underline{y(x)=\frac{1}{3}\left[(x-1)^2+\frac{1}{1-x}\right]}}$ $\quad$ 0,5 $\quad$ (für $x\geq 2$)

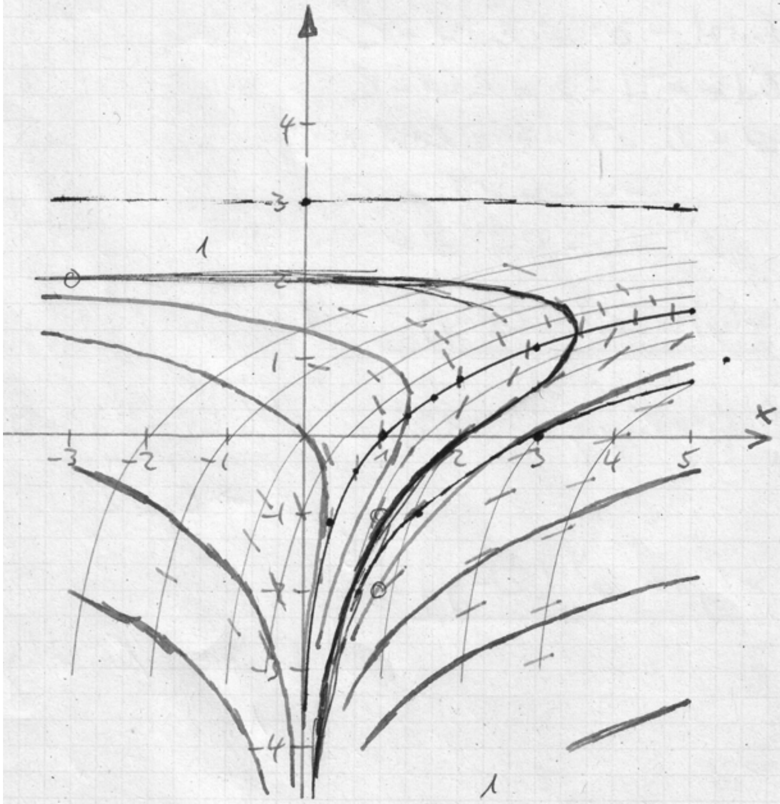
gilt eigentlich für $x>1$!

4.) Lösen Sie das Anfangswertproblem : $$y' - y = \frac{x}{3y^2} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \;.$$ Tip : wählen Sie eine Substitution $z = y^n$ für ein geeignetes n. (**Maple ist nur zur Kontrolle zugelassen**) $$y' - y = \frac{x}{3y^2}$$ Substitution : $z = y^n \Rightarrow z' = n \cdot y^{n-1} \cdot y' = n \cdot y^{n-1}\left(\frac{x}{3y^2} + y\right)$ $$z' = n \cdot \left(\frac{x \cdot y^n}{3 \cdot y^{2+1}} + \underbrace{y^n}_{z}\right)$$ $n = 3 \Rightarrow z' = x + 3z \Rightarrow z' - 3z = x$ $$\Rightarrow z_h(x) = C_1 \cdot e^{3x}$$ $$z_p(x) = C_2 x + C_3 \Rightarrow z_p' = C_2$$ $$\Rightarrow C_2 - 3C_2 x - 3C_3 = x \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{3}$$ $$C_3 = \frac{C_2}{3} = -\frac{1}{9}$$ $$\Rightarrow y = \sqrt[3]{z} \Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{C_1 \cdot e^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{9}}$$ Anfangsbedingung : $y(0) = \sqrt[3]{C_1 - \frac{1}{9}} = 1$ $$\Rightarrow C_1 = 10/9$$ $$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = \sqrt[3]{\frac{10}{9} e^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{9}}}}$$	**4**
5.) Skizzieren Sie (möglichst genau) mit Hilfe der Isoklinenmethode die spezielle Lösung der <u>nichtlinearen</u> DG : $$y'(x) \cdot \left(1 - x \cdot e^{-y(x)}\right) + e^{-y(x)} = 0 \qquad ,$$ welche durch den Punkt $(2, 0)$ verläuft. Die Kurve ist im Gebiet $-3 \le x \le 3$ und $-3 \le y \le 3$ zu skizzieren.	**4**

$$y' = + \frac{e^{-y}}{x e^{-y} - 1} = c = \text{const}$$

$$\Rightarrow e^{-y} = c \cdot x \cdot e^{-y} - c \quad \Rightarrow e^{-y}(cx - 1) = c$$

$$\Rightarrow \frac{cx-1}{c} = e^{y} \quad \Rightarrow y = \ln\left(\frac{cx-1}{c}\right) \quad 1$$



c	
1	$\ln x-1$
2	$\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$
4	$\ln\left(x-\frac{1}{4}\right)$
$0{,}5$	$\ln(x-2)$
$1/4$	$\ln(x-4)$
-1	$\ln(x+1)$
$-1/2$	$\ln(x+2)$

1

6.) Approximieren Sie $\sqrt[3]{2}$ mit der Methode von Neville, indem Sie die Funktion $f(x) = 2^x$ an 5 geeigneten Stützstellen durch ein Polynom approximieren. Dabei müssen die Funktionswerte an den Stützstellen „von Hand“ berechenbar sein. **3**

Vgl. Maple–Vorlage

Zeit : $1^h\ 30^{min}$ **Maximale Punktezahl : 21** **Note 6 für 20 Punkte**