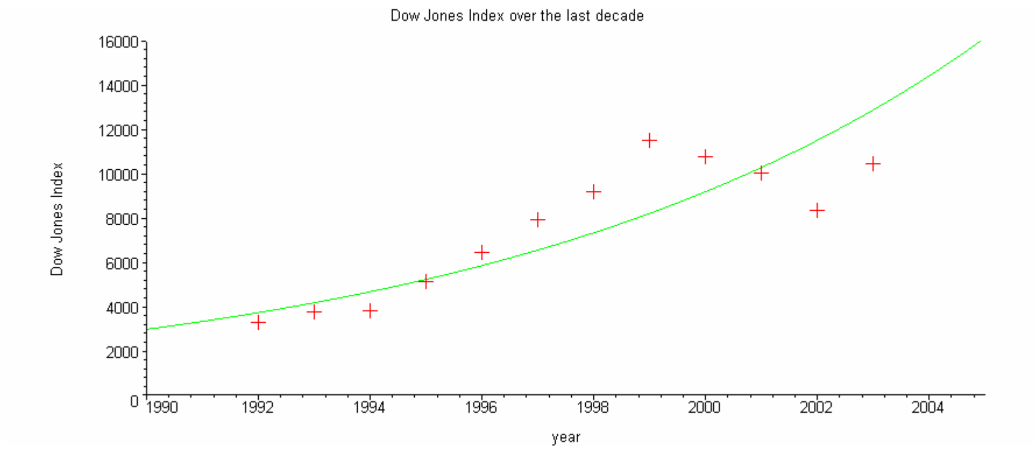
Mathematik Lösungen 3.14

1.) In der nachfolgenden Tabelle ist der Dow–Jones Industrial Average jeweils zum Jahresende für die letzten 12 Jahre gegeben. Machen Sie eine Voraussage für den *Dow* für Ende 2004 resp. Ende 2010, indem Sie an den **logarithmischen** Index eine Ausgleichsgerade legen. Diskutieren Sie das Resultat.

Bestimmen Sie auch den Korrelationskoeffizienten der Regressionsgeraden.

1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
3301	3754	3834	5117	6448	7908	9181	11497	10788	10022	8342	10454

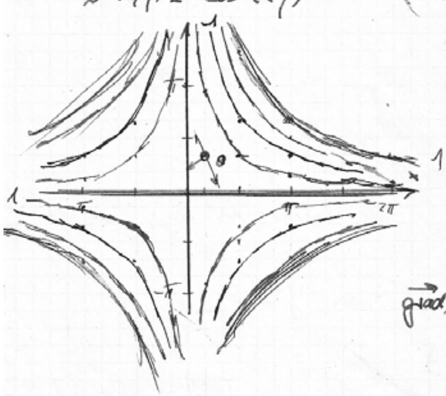


Vgl. Maple–Vorlage

2.) Gegeben sei die Potentialfunktion $\Phi(x,y) = \cos(x \cdot y)$. Bestimmen Sie :

a.) die Richtung der Höhenlinie durch den Punkt $\left(\pi/6 \, , 1 \right)$.

$\varnothing(x,y) = \cos(xy)$



$c=0: \quad y = \frac{\pi/2 + k\pi}{x}$

$c=-1: \quad y = \frac{\pi + 2k\pi}{x}$

$\vec{\text{grad}}\,\varnothing = \begin{pmatrix} -y \sin(xy) \\ -x \sin(xy) \end{pmatrix}$

$y' = \frac{\varnothing_y}{\varnothing_x} = \frac{x}{y}$

$\vec{\text{grad}}\,\varnothing\left(\frac{\pi}{6}, 1\right) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\pi/12 \end{pmatrix}$

a.) Höhenlinie $\perp$ $\vec{\text{grad}}\,\varnothing$ $\Rightarrow$ Richtung der Höhenlinie:

$\lambda \begin{pmatrix} \pi/12 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \pi/6 \\ -1 \end{pmatrix}$

b.) die Tangentialebene an die Raumfläche Φ im Punkt $\left(\pi/6 \, , 1 \, , ? \right)$.

b.) $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(-1 \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \left(-\frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6}\right)(y - 1)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{12}(y - 1)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} y$

$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} y$

Tangentialebene im Punkte:
$\left(\frac{\pi}{6}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c.) Geben Sie eine graphische Darstellung der Raumfläche mit Hilfe von Maple.

Vgl. Maple–Vorlage

3.) Gegeben sind die unten tabellierten Messwerte. Approximieren Sie diese Messwerte durch die Funktion :

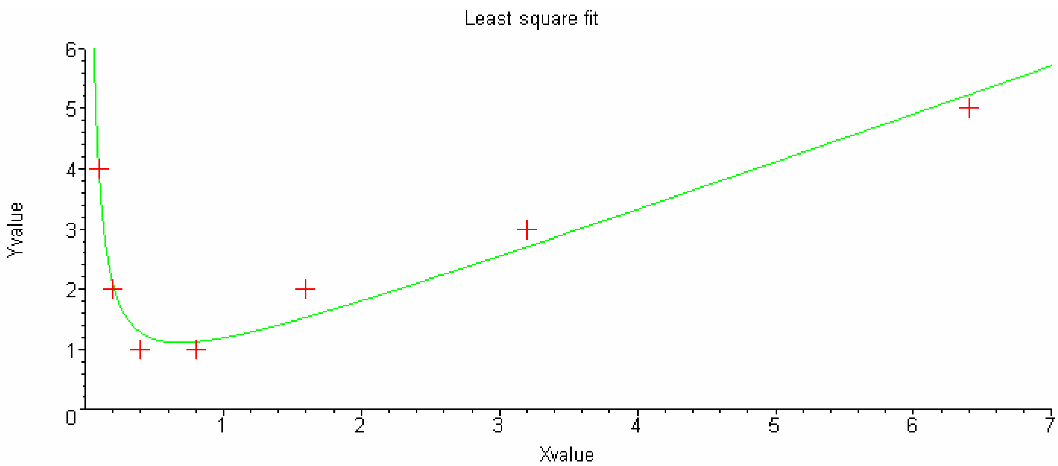
$$y = f(x) = \frac{A}{x} + B \cdot x \ ,$$

d.h. bestimmen Sie die Parameter A und B so, dass die Summe der Abweichungsquadrate

$$\chi = \sum_k \left(\frac{A}{x_k} + B \cdot x_k - y_k \right)^2$$

minimal wird.

x_k	0.1	0.2	0.4	0.8	1.6	3.2	6.4
y_k	4	2	1	1	2	3	5



Vgl. Maple–Vorlage

4.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von n Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben (Schaltjahre werden nicht berücksichtigt) ? Skizzieren Sie diese Wahrscheinlichkeit als Funktion von n .

(Dasselbe Problem tritt bei der Suchen mit Hashtabellen auf, d.h. wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte der Hashfunktion für mindestens zwei verschiedene Schlüssel identisch sind)

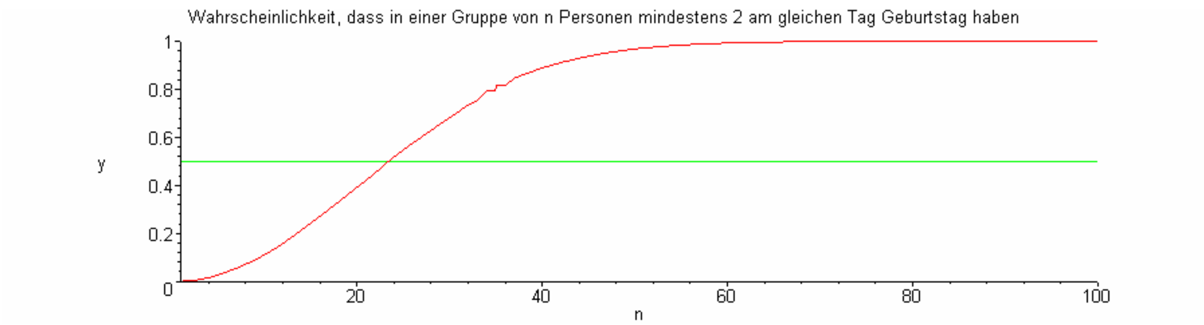
$\bar{E}$: alle n Personen haben an verschiedenen Tagen Geburtstag

$$|\bar{E}| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-n+1) = \binom{365}{n} \cdot n!$$

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}$$

$$= 1 - 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right)\left(1 - \frac{3}{365}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$



Vgl. Maple–Vorlage