Mathematik Lösungen 3.15

1.) Entwickeln Sie die Funktion $\Phi(x, y) = \cos(x \cdot y)$ (vgl. Übung 3.14.2) an der Stelle $\left(\pi/6, 1\right)$ in eine Taylor–Reihe. Geben Sie alle Glieder bis zur Ordnung 2 an.

Vgl. Maple–Vorlage

2.) Approximieren Sie folgende Integrale mit der

$i.)$ Mittelpunktregel $ii.)$ Trapezregel $iii.)$ Simpson'schen Regel

Geben Sie jeweils ein obere Schranke an für den Fehler und berechnen sie den tatsächlichen Fehler :

a.) $\int_1^2 x \cdot \ln(x) \cdot dx$ b.) $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$ c.) $\int_0^1 x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx$

d.) $\int_0^\pi x^2 \cdot \cos(x) \cdot dx$ e.) $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} \cdot dx$ f.) $\int_0^1 e^{-x^2} \cdot dx$

Vgl. Maple–Vorlage

3.) Mit einem Würfel wird gewürfelt bis zum zweiten Mal die 6 gefallen ist. Der Ereignisraum dieses Zufallsexperiments ist also abzählbar unendlich :

$$\Omega = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \ldots\} ,$$

wobei ω_i das Elementarereignis „*im i–ten Wurf kommt zum zweiten Mal die* 6" ist.

a.) Ergänzen Sie Ω zu einem Wahrscheinlichkeitsraum, indem Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_i = P(\{\omega_i\})$ für alle $i = 2, 3, 4, \ldots$ festlegen.

ω_{ij} : "Eine 6 genau in Wurf j und i" $(1 \le j < i)$

$P(\omega_{ij}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$

$P(\omega_i) = (i-1) \cdot P(\omega_{ij}) = \underline{\underline{(i-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{i-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2}}$

Normierung : $\sum_{i=2}^{\infty} (i-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{i-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}\left(\sum_{i=2}^{\infty} i\left(\frac{5}{6}\right)^{i-2} - \sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-2}\right)$

$= \frac{1}{36}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\left(\frac{5}{6}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)$

$= \frac{1}{36}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^k}_{\frac{5/6}{(5/6-1)^2}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k}_{\frac{1}{1-q}}\right) = \frac{1}{36}\left(\frac{5\cdot 6\cdot 6}{6\cdot 1} + \frac{1\cdot 6}{1}\right) = \underline{\underline{1}}$

b.) Für welches i ist f_i maximal ?

$$f_i = (i-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{i-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2$$
$$f_{i+1} = i\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2$$
$$\frac{f_{i+1}}{f_i} = \frac{i}{i-1}\cdot\frac{5}{6}$$

$$\frac{f_{i+1}}{f_i} > 1 \iff \frac{i}{i-1}\cdot\frac{5}{6} > 1 \Rightarrow i\frac{5}{6} > i-1$$
$$\Rightarrow 1 > \frac{i}{6} \Rightarrow \underline{\underline{6 > i}}$$

$$i = 6 \Rightarrow \frac{f_{i+1}}{f_i} = \frac{f_7}{f_6} = \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6} = 1$$

$$\Rightarrow f_2 < f_3 < \dots < f_6 = f_7 > f_8 > f_9 > \dots$$
$$\underline{\underline{f_6 = f_7 = \frac{5^5}{6^6} \approx 0{,}06698}}$$

c.) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion f_i und die Verteilungsfunktion $F(i)$.

Vgl. Maple–Vorlage

4.) Bei der Übertragung auf einem binären Kanal kommen die Zeichen **0** und **1** im Verhältnis 3:4 vor. Ein **0** wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% fehlerhaft übermittelt (d.h. als **1** empfangen), ein **1** mit einer Wahrscheinlichkeit von 30%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

a.) bei der Übertragung eines Zeichens ein Fehler auftritt.

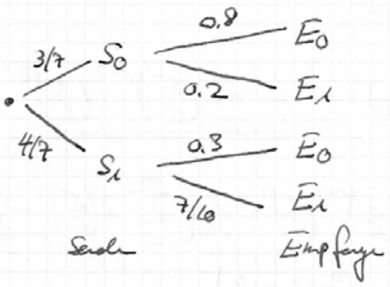
b.) ein **0** empfangen wird.

c.) tatsächlich ein **0** gesendet wurde, wenn ein **0** empfangen wird.

d.) tatsächlich ein **1** gesendet wurde, wenn ein **1** empfangen wird.

S_0 : 0 wird gesendet $\quad$ E_0: 0 wird empfangen
S_1 : 1 wird gesendet $\quad$ E_1: 1 wird empfangen

$$P(S_0) + P(S_1) = 1 = P(E_0) + P(E_1)$$
$$P(S_0) = \frac{3}{7}, \quad P(S_1) = \frac{4}{7}$$
$$P(E_1 \mid S_0) = 0.2 \iff P(E_0 \mid S_0) = 0{,}8$$
$$P(E_0 \mid S_1) = 0{,}3 \iff P(E_1 \mid S_1) = 0{,}7$$



a.) $P(\text{"Übertragungsfehler"}) = P(E_1|S_0)\cdot P(S_0) + P(E_0|S_1)\cdot P(S_1)$

$$= 0{,}2 \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{10}\cdot\frac{4}{7} = \frac{18}{70} \approx 25{,}7\%$$

$$=$$

b.) $\frac{3}{7}\cdot\frac{8}{10} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{10} = \underline{\underline{\frac{36}{70}}} \approx 51{,}4\%$

c.) Satz von Bayes

$$P(S_0|E_0) = \frac{P(E_0|S_0)\cdot P(S_0)}{P(E_0|S_0)\cdot P(S_0) + P(E_0|S_1)\cdot P(S_1)}$$

$$= \frac{24/70}{24/70 + 12/70} = \frac{24}{36} = \underline{\underline{\frac{2}{3} \approx 66{,}7\%}}$$

$$P(S_1|E_1) = \frac{28/70}{28/70 + 6/70} = \frac{28}{34} = \underline{\underline{\frac{14}{17} \approx 82{,}35\%}}$$