Mathematik Lösungen 3.16

1.) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_G f(x,y) \cdot dg$ über dem Gebiet G für :

a.) $f(x,y) = x + 2xy$ mit $G = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; 2 \le x \le 5 \text{ und } 0 \le y \le \sqrt{x} \right\}$

$$\int (x+2xy)\,dg = \int_2^5 \underbrace{\int_0^{\sqrt{x}} (x+2xy)\,dy}_{xy + xy^2 \big|_0^{\sqrt{x}} = x\sqrt{x} + x^2}\,dx$$

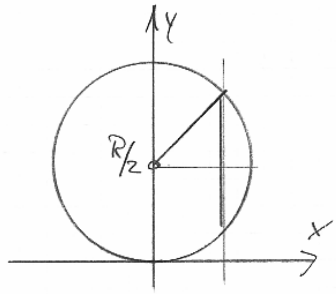
$$= \int_2^5 \left(x^{3/2} + x^2\right) dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{x^3}{3} \Big|_2^5$$

$$= \frac{2}{5}\left(\sqrt{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} - \sqrt{2} \cdot 4\right) + \frac{125-8}{3}$$

$$= \underline{\underline{10\sqrt{5} - \frac{8}{5}\sqrt{2} + 39}} \quad (\approx 60)$$

b.) $f(x,y) = x^2 + y^2$ mit $G = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 \le \frac{R^2}{4} \right\}$

b.) Variante 1 (kartes. Koord.)



$$\int (x^2+y^2)\,dg = \int_{-R/2}^{R/2} \underbrace{\int_{\frac{R}{2}-\sqrt{\frac{R^2}{4}-x^2}}^{\frac{R}{2}+\sqrt{\frac{R^2}{4}-x^2}} (x^2+y^2)\,dy}_{x^2 y + \frac{y^3}{3}\Big|_{\frac{R}{2}-\sqrt{\frac{R^2}{4}-x^2}}^{\frac{R}{2}+\sqrt{R^2/4-x^2}}}\,dx$$

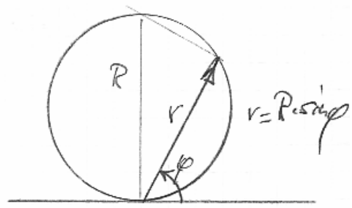
$$= \int_{-R/2}^{R/2} \left[x^2\left(2\sqrt{\frac{R^2}{4}-x^2}\right) + \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{R}{2}+\sqrt{\frac{R^2}{4}-x^2}\right)^3 - \left(\frac{R}{2}-\sqrt{\frac{R^2}{4}-x^2}\right)^3\right\}\right] dx$$

$$= 2\underbrace{\int_{-R/2}^{R/2} x^2\sqrt{\frac{R^2}{4}-x^2}\,dx}_{\frac{-x}{4}\left(\frac{R^2}{4}-x^2\right)^{3/2}\Big|_{-R/2}^{R/2} + \frac{R^2}{32}\left(x\sqrt{\frac{R^2}{4}-x^2} + \frac{R^2}{4}\arcsin\frac{2x}{R}\right)\Big|_{-R/2}^{R/2}} + \frac{1}{3}\underbrace{\int_{-R/2}^{R/2} 6\frac{R^2}{4}\sqrt{\frac{R^2}{4}-x^2}\,dx}_{\frac{3R^2}{2\cdot 2}\left(x\sqrt{\frac{R^2}{4}-x^2}\right)\Big|_{-R/2}^{R/2} + \frac{3R^2}{4}\cdot\frac{R^2}{4}\arcsin\left(\frac{x\cdot 2}{R}\right)\Big|_{-R/2}^{R/2}} + \frac{1}{3}\underbrace{\int_{-R/2}^{R/2} 2\left(\frac{R^2}{4}-x^2\right)^{3/2} dx}_{\frac{1}{2}\left(x\left(\frac{R^2}{4}-x^2\right)^{3/2}\right)\Big|_{-R/2}^{R/2} + \frac{1}{2}\frac{3}{2\cdot 2}\frac{R^2}{4}\,x\sqrt{\frac{R^2}{4}-x^2}\Big|_{-R/2}^{R/2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{R^4}{16}\arcsin\left(\frac{2x}{R}\right)\Big|_{-R/2}^{R/2}}$$

$$= 2\left(\frac{R^2}{32}\cdot\frac{R^2}{4}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\right) + \frac{1}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{3}R^4}{16}\,\frac{\pi}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\right) + \frac{1}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{3}R^4}{64}\,\frac{\pi}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\right)$$

$$= \pi R^4\left(\frac{1}{64}+\frac{4}{64}+\frac{1}{64}\right) = \underline{\underline{\frac{3\cdot\pi R^4}{32}}}$$

Variante 2 (Polarkoord.)



$dg = r\cdot dr\cdot d\varphi$

$$\int \underbrace{f}_{x^2+y^2=r^2}\cdot\,dg = \int_0^{\pi}\underbrace{\int_0^{R\cdot\sin\varphi} r^2\cdot r\,dr}_{\frac{r^4}{4}\Big|_0^{R\cdot\sin\varphi} = \frac{R^4}{4}\sin^4\varphi}\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{R^4}{4}\cdot\sin^4\varphi\,d\varphi = \frac{R^4}{4}\left(\frac{3\varphi}{8} - \underbrace{\frac{\sin\varphi 2}{4}}_{0} + \underbrace{\frac{\sin 4\varphi}{32}}_{0}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \underline{\underline{\frac{3\pi R^4}{32}}}$$

2.) Approximieren Sie folgende Integrale mit der zusammengesetzten Simpson'schen Regel auf 8 Teilintervallen :

a.) $\int_1^2 x \cdot \ln(x) \cdot dx$ b.) $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ c.) $\int_0^1 x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx$

d.) $\int_0^\pi x^2 \cdot \cos(x) \cdot dx$ e.) $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} \cdot dx$ f.) $\int_0^1 e^{-x^2} \cdot dx$

Vgl. Maple–Vorlage

3.) Approximieren Sie Integrale der Aufgabe 2.) mit der Gauß'schen Quadratur für n = 2, 3, 4 und 5.

Vgl. Maple–Vorlage

4.) Von welchem Volumen an abwärts genügt die Messung des Volumens einer Kugel auf 1 cm^3 genau nicht mehr, um daraus ihre Oberfläche mit einem relativen Fehler von höchstens 1% zu berechnen ?

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 \quad \Rightarrow \quad \Delta V = 3\,\frac{4\pi}{3} R^2 \cdot \Delta R$$

$$A = 4\pi R^2 \ , \qquad \Delta A = \frac{\partial A}{\partial R} \cdot \Delta R = 2 \cdot 4\pi R \cdot \Delta R$$

$$\frac{\Delta A}{A} = 2\,\frac{\Delta R}{R} = 2 \cdot \frac{1}{3}\,\frac{\Delta V}{V}$$

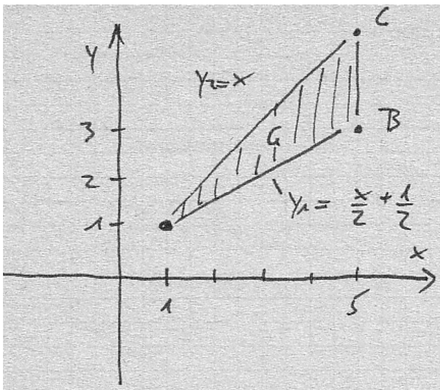
$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta V}{V} = 3\,\frac{\Delta R}{R}$$

$$0{,}01 \geq \frac{\Delta A}{A} = \frac{2}{3}\,\frac{\Delta V}{V}$$

$$\Rightarrow \quad V \geq \frac{2}{3}\,\frac{\Delta V}{0{,}01} = \frac{2}{3}\,\frac{1\,\text{cm}^3}{0{,}01} = \underline{\underline{66{,}7\,\text{cm}^3}}$$

5.) Bestimmen Sie das Doppelintegral wobei das Gebiet G das Dreieck mit den Ecken $A = (1, 1)$, $B = (5, 3)$ und $C = (5, 5)$ ist.

$$\int_G (2x + y + 1) \cdot dg$$



$$\int_G (2x+y+1)\,dg = \int_1^5 \underbrace{\int_{\frac{x+1}{2}}^{x} (2x+y+1)\,dy}\,dx$$

$$2xy + \frac{y^2}{2} + y \Big|_{\frac{x+1}{2}}^{x} =$$

$$= \int_1^5 \left(2x^2 + \frac{x^2}{2} + x - 2x \cdot \frac{x+1}{2} - \frac{(x+1)^2}{8} - \frac{x+1}{2} \right) dx$$

$$= \int_1^5 \left(\frac{5x^2}{2} + \cancel{x} - x^2 - \cancel{x} - \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \underbrace{\int_1^5 \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{3x}{4} - \frac{5}{8} \right) dx}$$

$$\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 8} - \frac{3x^2}{8} - \frac{5x}{8} \Big|_1^5$$

$$= \frac{125}{2} - \frac{125}{24} - \frac{3 \cdot 25}{8} - \frac{25}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8}$$

$$= \frac{124}{2} - \frac{\cancel{124}^{\,31}}{\cancel{24}_{\,6}} + \frac{8 - 25 - 75}{8}$$

$$= 62 - \frac{31}{6} - \frac{\cancel{92}^{\,23}}{\cancel{8}_{\,2}} = 62 - \frac{31 + 69}{6} = 62 - \frac{\cancel{100}^{\,50}}{\cancel{6}_{\,3}}$$

$$= \frac{186 - 50}{3} = \underline{\underline{\frac{136}{3}}}$$