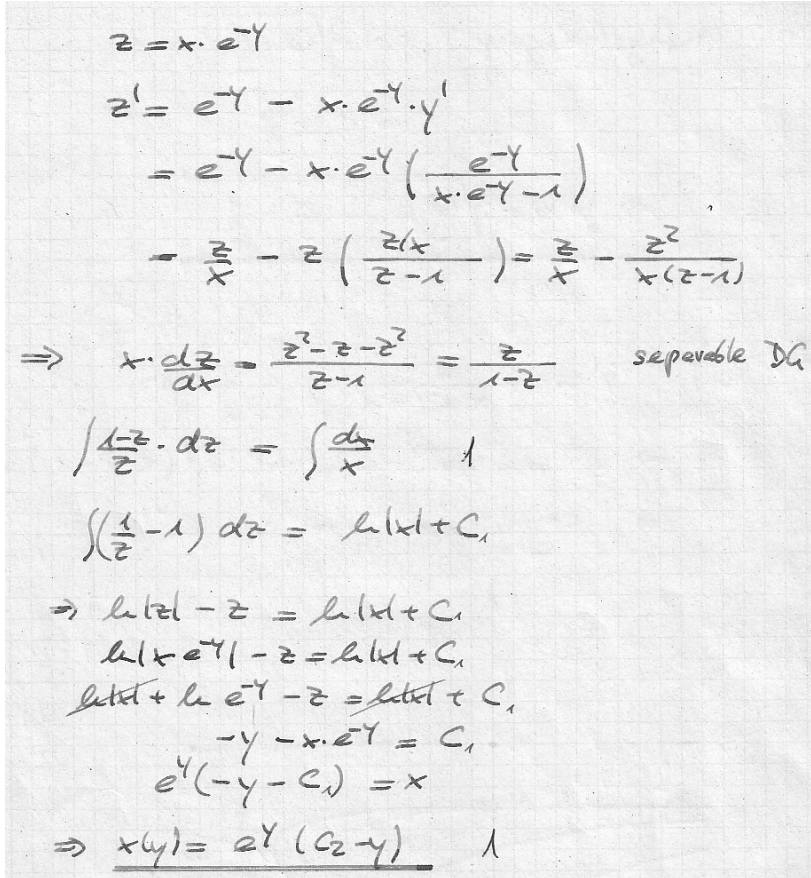
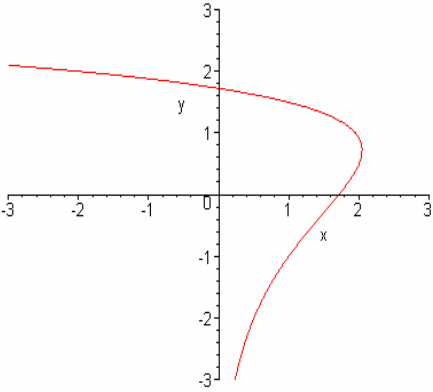


Mathematik Lösungen Prüfung 3.17

Name :	Punkte:
<p>1.) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' \cdot (1 - x \cdot e^{-y}) + e^{-y} = 0$ mit $y(1) = -1$ mit Hilfe der Substitution $u = x \cdot e^{-y}$ und stellen Sie die Lösung dar in der Form $x = f(y)$.</p> <p>(Maple ist nur zur Kontrolle zugelassen)</p>  <p>Anfangsbedingung: $x(-1) = e^{-1} \cdot (C_2 - (-1)) = 1$ $\Rightarrow C_2 + 1 = e \Rightarrow C_2 = e - 1$ $\Rightarrow \underline{x(y) = e^y (e - 1 - y)}$</p> 	4

2.) Nach dem Picknick vermisst eine Familie mit zwei Kindern ihren Hund. Es gibt drei Möglichkeiten :

A : Er ist heimgelaufen und erwartet die Familie vor der Haustüre.

B : Er bearbeitet noch den grossen Knochen auf dem Picknick-Platz.

C : Er streunt im Wald.

Aufgrund der Gewohnheiten sind die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse bekannt :

$$P(A) = 0.25 \quad , \quad P(B) = 0.5 \quad \text{und} \quad P(C) = 0.25$$

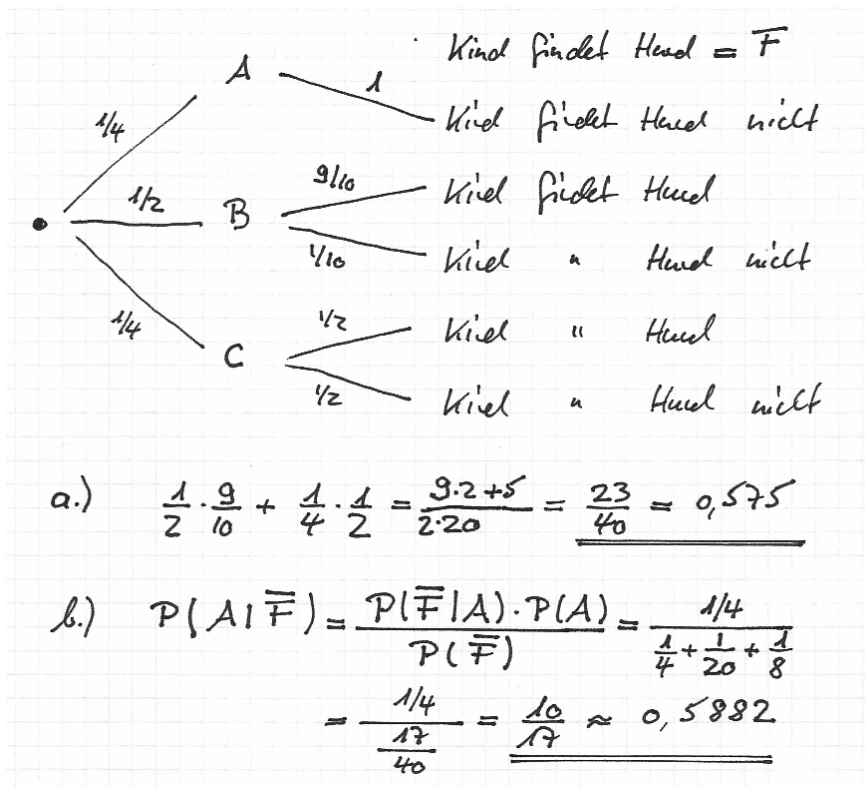
Ein Kind wird zum Picknick-Platz geschickt, das zweite zum Wald. Wenn der Hund beim Picknick-Platz ist, so wird er mit 90%iger Sicherheit gefunden; streunt er aber im Wald, so wird er nur 50%iger Sicherheit gefunden.

a.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet ein Kind den Hund ?

2

b.) Falls die Kinder den Hund nicht finden, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, diesen zuhause vor der Haustüre anzutreffen ?

3



13. Januar 2005

3.) Lösen Sie das DG-System :

$$y'(x) = 2z(x) + 1$$

$$y(x) = 2z'(x) + 1$$

$$\text{mit } y(0) = 1 = z(0).$$

4

(Maple ist nur zur Kontrolle zugelassen)

$$\left. \begin{array}{l} y' = 2z + 1 \\ y = 2z' + 1 \end{array} \right\} y'' = 2z' = y - 1$$

$$\Rightarrow \underline{y'' - y = -1} \quad 1$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

$$\underline{y_h(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}} \quad 0,5$$

$$\text{Ansatz: } y_p = A \Rightarrow A = +1$$

$$\underline{y(x) = 1 + C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}} \quad 0,5$$

$$\underline{z(x) = \frac{y' - 1}{2} = \frac{C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 1}{2}} \quad 1$$

$$\text{Auf. bed.: } 1 = y(0) = 1 + C_1 + C_2$$

$$2 \cdot 1 = z(0) = -1 + C_1 - C_2$$

$$\underline{3 = 2C_1} \quad C_1 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow C_2 = -C_1 = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{2} e^x - \frac{3}{2} e^{-x} + 1} \quad 1$$

$$\boxed{z(x) = \frac{3}{4} e^x + \frac{3}{4} e^{-x} - \frac{1}{2}}$$

4.) Bestimmen Sie (exakt) alle relativen Extrempunkte der Raumfläche :

4

$$z(x,y) = x^2y - 6xy + x^2 - 6x + 8y^2$$

$$z(x,y) = x^2y - 6xy + x^2 - 6x + 8y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 6y + 2x - 6 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y + 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 6x + 16y \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 16$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x - 6$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 16y = 0$$

$$2(xy - 3y + x - 3) = 2(x-3)(y+1) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x=3 \text{ oder } y=-1}$$

$$\Rightarrow 9 - 18 + 16y = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$y = \frac{9}{16} \quad x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} \begin{matrix} \nearrow 8 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow P_1 = \left(3, \frac{9}{16}\right), \quad P_2 = (8, -1), \quad P_3 = (-2, -1)$$

Entscheidung, welche Punkte Extrempunkte sind:

$$\Delta = z_{xx} \cdot z_{yy} - (z_{xy})^2 = 16(2y+2) - (2x-6)^2$$

$$\Delta = 32y + 32 - 4x^2 + 24x - 36 = -4x^2 + 24x + 32y - 4$$

$$P_1: \Delta\left(3, \frac{9}{16}\right) = -36 + 72 + 18 - 4 = 50 > 0$$

$$P_2: \Delta(8, -1) = -256 + 192 - 32 - 4 = -100 < 0$$

$$P_3: \Delta(-2, -1) = -16 - 48 - 32 - 4 = -100 < 0$$

P_2 und P_3 sind keine Extrempunkte

$P_1 = \left(3, \frac{9}{16}\right)$ ist ein rel. Minimum, weil $z_{yy} = 16 > 0$

5.) Bei einem 100m-Lauf werden an einigen Positionen die Zeit und die Geschwindigkeit eines Läufers gemäss folgender Tabelle gemessen :

4

Position :	0	10	20	30	50	75	m
Zeit :	0	2.30	3.40	4.45	6.50	9.10	sec
Geschwindigkeit :	0	29.7	34.2	34.8	35.0	34.0	km/h

Approximieren Sie diese Daten durch ein Hermite-Spline und schätzen Sie damit die Laufzeit $t(100 \text{ m})$ sowie die Geschwindigkeit im Ziel.

Vgl. Maple-Vorlage