Mathematik Übung 3.18

1.) Nehmen wir an, dass in einer Fernsehshow zum Schluss nur noch ein Kandidat X übrig ist, der eine von drei geschlossenen Türen auswählen darf. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den beiden anderen stecken Trostpreise, jeweils ein T–Shirt mit der Aufschrift FS RDS. Kandidat X zeigt auf eine Tür, sagen wir Nummer eins; diese bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator, der weiss, hinter welcher Türe sich das Auto befindet, öffnet eine andere Tür, z. Bsp. Nummer drei, und zeigt dem Publikum ein T–Shirt. Der Kandidat X erhält nun die Möglichkeit, bei der zuerst gewählten Türe zu bleiben oder eine andere zu öffnen. Was soll er tun ?

A_i : "Auto ist hinter Tür i" $i=1,2,3$

M_i : "Moderator öffnet Tür i" $i=1,2,3$

zu vergleichen: $P(A_1 | M_3)$ und $P(A_2|M_3)$

Bayes:

$$P(A_1|M_3) = \frac{P(A_1)\cdot P(M_3|A_1)}{P(A_1)P(M_3|A_1) + P(A_2)\cdot P(M_3|A_2) + P(M_3|A_3)\cdot P(A_3)}$$

$$P(A_2|M_3) = \frac{P(A_2)\cdot P(M_3|A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)\, P(M_3|A_i)}$$

$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/3$

$P(M_3 | A_1) = P(M_2 | A_1) = 1/2$

$P(M_3 | A_2) = 1$

$P(M_3 | A_3) = 0$

$$\Rightarrow P(A_1|M_3) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1\cdot 2}{6\cdot 1} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2|M_3) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ Aus stochastischer Sicht sollte der Kandidat die Tür wechseln.

2.) Es sei K der achsenparallele Würfel mit der Kantenlänge a und dem Mittelpunkt im Ursprung des cartesischen Koordinatensystems. Berechnen Sie

$$\int_K f\cdot dK \qquad \text{mit} \qquad f(x,y,z) = x^3 + x\cdot e^z \ .$$

Vgl. Maple–Vorlage

```
> int(int(int(  x^3 + exp(z)*x , z=-a/2..a/2), y=-a/2..a/2), x=-a/2..a/2);
```

0

3.) Berechnen Sie den Schwerpunkt für den homogenen Körper, begrenzt durch die vier Flächen :

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 0 \quad \text{und} \quad x + y + z = 1 \; .$$

Bestimmen Sie anschliessend die Eigenwerte und die Eigenvektoren des so genannten Trägheitstensors, welcher gegeben ist durch :

$$T = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \; .$$

Die einzelnen Komponenten sind durch folgende Raumintegrale gegeben, wobei sich nun x, y und z auf das cartesische Koordinatensystem durch den Körperschwerpunkt S bezieht :

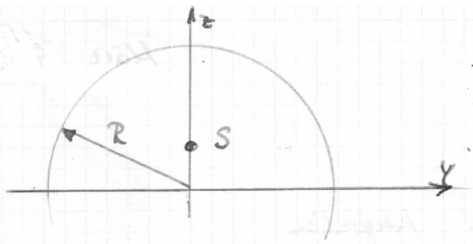
$$I_{xx} = \int_K (y^2 + z^2) \cdot dm \qquad I_{yy} = \int_K (x^2 + z^2) \cdot dm \qquad I_{zz} = \int_K (x^2 + y^2) \cdot dm$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_K xy \cdot dm \qquad I_{xz} = I_{zx} = \int_K xz \cdot dm \qquad I_{yz} = I_{zy} = \int_K yz \cdot dm$$

Vgl. Maple–Vorlage

4.) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der homogenen Halbkugel, welche festgelegt wird durch :

$$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2 \quad \text{und} \quad z \ge 0 \; .$$



$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3$$

$$z_S = \frac{1}{V} \int_K z \cdot dV = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\int_0^R r^3 \cos\vartheta \cdot \sin\vartheta \, dr}_{\cos\vartheta \sin\vartheta \frac{R^4}{4}} \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \cdot 2\pi \frac{R^4}{4} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \cdot d\vartheta}_{-\frac{1}{4}\cos 2\vartheta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}}$$

$$z_S = \frac{3 \cdot \pi \cdot R^4}{2\pi R^3 \cdot 4} = \frac{3R}{8}$$

$$\underline{S = \left(0, 0, \frac{3R}{8}\right)}$$