Mathematik Lösungen 3.19

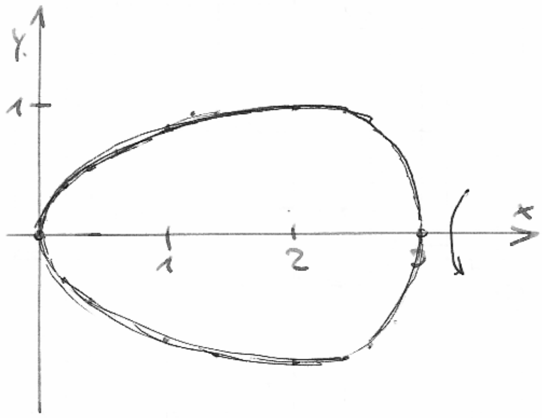
1.) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Körpers, welcher durch die Bedingungen festgelegt wird :

$$y^2 \le 4x \ , \quad 2x + y + z \le 4 \quad \text{und} \quad z \ge 0 \ .$$

Vgl. Maple–Vorlage

2.) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, welcher entsteht, wenn die Kurve $y^2 \cdot (x-4) = x \cdot (x-3)$ mit $0 \le x \le 3$ um die x–Achse rotiert wird.

$$y = \pm \sqrt{\frac{x(x-3)}{x-4}}$$



Guldin :

$$y_S = \frac{\int y \cdot dF}{\int dF}$$

$$F = \int dF \ , \qquad V = 2\pi \cdot F \cdot y_S = 2\pi \cdot \int y \cdot dF$$

$$V = 2\pi \cdot \int_0^3 \underbrace{\int_0^{\sqrt{\frac{x(x-3)}{x-4}}} y \cdot dy}_{\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{\frac{x(x-3)}{x-4}}}} dx = \frac{2\pi}{2} \int_0^3 \frac{x(x-3)}{x-4} dx$$

$$x^2 - 3x : x - 4 = x + 1 + \frac{4}{x-4}$$

$$\begin{array}{l} x^2 - 3x \\ \underline{-x^2 + 4x} \\ \quad x \\ \underline{\quad -x + 4} \\ \qquad 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow V = \pi \cdot \underbrace{\int_0^3 \left(x + 1 + \frac{4}{x-4} \right) dx}_{\frac{x^2}{2} + x + 4 \ln|x-4| \Big|_0^3 = \frac{9}{2} + 3 + 4 \underbrace{\ln 1}_{0} - 4 \ln 4} = \underline{\underline{\pi \cdot \left(\frac{15}{2} - 8 \ln 2 \right)}}$$

3.) Schreiben Sie ein Java–Programm mit welchem Sie die folgenden Integrale mit der Romberg–Methode approximieren können. Berechnen Sie damit jeweils $R_{6,6}$:

a.) $\int_1^2 x \cdot \ln(x) \cdot dx$ b.) $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ c.) $\int_0^1 x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx$

d.) $\int_0^\pi x^2 \cdot \cos(x) \cdot dx$ e.) $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} \cdot dx$ f.) $\int_0^1 e^{-x^2} \cdot dx$

Vgl. Java–Vorlage

4.) Beim Lotto werden jeweils 6 Zahlen aus 45 zufällig ausgewählt. Bei der letzten Ziehung waren es die Zahlen 6, 8 ,9 ,12 ,19 und 26. Es kamen dabei die Nachbarzahlen 8 und 9 vor. Ist dies erstaunlich? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ziehung Nachbarzahlen enthält.

$\bar{A}$: Menge aller 6-Teilmengen ohne Nachbarn

□ ■ □ ■ □ ■ □ … □ □

5 Zwischenräume ⇒ 6 Zahlen können auf 40 Plätze verteilt werden.

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{40}{6}}{\binom{45}{6}} = \underline{\underline{0{,}5287}}$$

5.) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion zur exponentiellen Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{für } x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

keine Erinnerung hat, d.h. es gilt für eine entsprechend verteilte Zufallsvariable X:

$$P(X \ge S+T \mid X \ge S) = P(X \ge T) \qquad \text{für } S, T \ge 0$$

$$P(X \geq T) = 1 - P(X < T) = 1 - F(T)$$

$$= 1 - \underbrace{\int_0^T \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot dx}_{-e^{-\lambda x}\big|_0^T} = 1 - (-e^{-\lambda T} + 1)$$

$$\underline{P(X \geq T) = e^{-\lambda T}}$$

$$P(X \geq S+T \mid X \geq S) = \frac{P(\{X \geq S+T\} \cap \{X \geq S\})}{P(X \geq S)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(S+T)}}{e^{-\lambda \cdot S}} = e^{-\lambda T}$$

$$= P(X \geq T)$$