Mathematik Lösungen 3.25

1.) Eine Firma produziert Bildschirme für einen Notebook–Hersteller und liefert wöchentlich 500 Bildschirme, welcher dieser mittels einer Stichprobe prüft. Enthält die Stichprobe im Umfang von 5% der gelieferten Bildschirme mehr als 2 defekte, so wird die gesamte Lieferung zurückgeschickt. Da der Bildschirmproduzent dieses Prüfprozedere kennt, setzt er sich zum Ziel, dass mindestens 90% seiner Lieferungen angenommen werden. Welchen Prozentsatz an defekten Bildschirmen muss angestrebt werden ?

Wie würde sich die Situation ändern, wenn bei der Stichprobe jeder geprüfte Bildschirm nach der Kontrolle wieder zur Lieferung zurückgegeben würde (Stichprobe mit Zurücklegen) ?

Vgl. Maple–Vorlage

2.) Sie sind Anlageberater im private Banking. Ein Kunde möchte CHF 2.– in die Lotterie (Börse) investieren. In der Lotterie A sind hundert Lose mit einem Treffer à CHF 100.–, in der Lotterie B sind zehn Lose mit zwei Treffer zu je CHF 5.–. Alle Lose kosten CHF 1.–. Entwickeln Sie verschiedene Strategien (*high/low risk vs. high/low yield*) und beraten Sie Ihren Kunden.

T: Treffer N: Niete

Strategie	$p(T_A \cdot T_B)$	$p(T_B \cdot T_B)$	$p(T_A \cdot N_B)$	$p(N_A \cdot T_B)$	$p(N_A \cdot N_B)$
2 Lose aus A	0	0	$2/100$	0	$98/100$
je 1 Los aus A&B	$\frac{1}{100}\cdot\frac{2}{10}$	0	$\frac{1}{100}\cdot\frac{8}{10}$	$\frac{99}{100}\cdot\frac{2}{10}$	$\frac{99}{100}\cdot\frac{8}{10}$
2 Lose aus B	0	$\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}+\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}$	$\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}$

$$E[X_{AA}] = \frac{2}{100}\cdot 100 + \frac{98}{100}\cdot 0 = 2$$

$$E[X_{AB}] = \frac{2}{1000}\cdot 105 + \frac{8}{1000}\cdot 100 + \frac{198}{1000}\cdot 5 + 0 = 2$$

$$E[X_{BB}] = \frac{2}{90}\cdot 10 + \frac{32}{90}\cdot 5 + 0 = 2$$

Gleiche Erwartungswerte, aber verschiedene Varianzen:

$$Var[X_{AA}] = \frac{2}{100}(98)^2 + \frac{98}{100}(0-2)^2 = \frac{98}{100}(196+4) = 196$$

$$Var[X_{AB}] = \frac{2}{1000}(103)^2 + \frac{8}{1000}(98)^2 + \frac{198}{1000}\,3^2 + \frac{792}{1000}(-2)^2 = 103$$

$$Var[X_{BB}] = \frac{2}{90}(8)^2 + \frac{32}{90}\,3^2 + \frac{56}{90}\,2^2 = \frac{64}{9}$$

$$\Rightarrow \sigma(X_{AA}) = 14 \quad , \quad \sigma(X_{AB}) \approx 10{,}1 \quad , \quad \sigma(X_{BB}) = \frac{8}{3}$$

Streuung von X_{BB} ist am kleinsten (kleinstes Risiko)!

high / low risk

high / low yield maximal return on investment

expected " " "

volatility minimal risk of total loss

3.) Die Verteilung einer stetigen zweidimensionalen Zufallvariablen $(X;Y)$ besitzt die Dichtefunktion :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c}{(1+x+y)^3} & \text{für } x \geq 0 \text{ und } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a.) Berechnen Sie $P(\,2 < X \leq 12\ ;\ 5 < Y \leq 15\,)$.

b.) Bestimmen Sie $E[X]$ und $E[Y]$ sowie $Var[X]$ und $Var[Y]$.

c.) Sind die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig ?

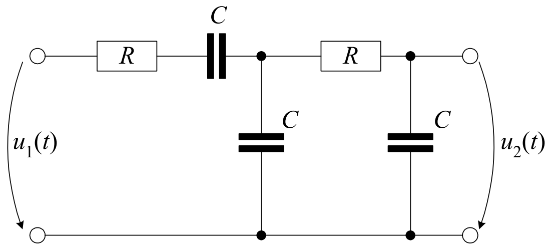
Vgl. Maple–Vorlage

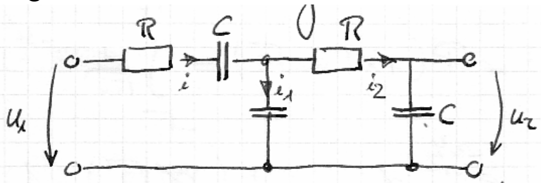
4.) Bestimmen Sie für den skizzierten Vierpol :

a.) Die Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$.

b.) Die Antwort $u_2(t)$, wenn $u_1(t) = U_0 \cdot \delta(t)$ ist.

c.) Zu welchem Zeitpunkt erreicht die Stoss-Antwort unter b.) ihren Maximalwert ? Wie gross ist dieser ?





$i = i_1 + i_2$

$$u_1(t) = R(i_1(t)+i_2(t)) + \frac{1}{C}\int_0^t (i_1(t)+i_2(t))\,dt + \frac{1}{C}\int_0^t i_1(t)\cdot dt$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i_1(t)\,dt = i_2(t)\cdot R + \frac{1}{C}\int_0^t i_2(t)\,dt$$

$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$$U_1(s) = R\cdot I_1(s) + R I_2(s) + \frac{1}{C\cdot s}\left(I_1(s) + I_2(s) + I_1(s)\right)$$

$$\frac{1}{Cs} I_1(s) = R\cdot I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s)$$

$$\Rightarrow U_1(s) = R\cdot\left(RC\cdot s\, I_2(s) + I_2(s)\right) + R I_2(s) + 2R I_2(s) + \frac{2}{C\cdot s} I_2(s) + \frac{1}{C\cdot s} I_2(s)$$

$$U_1(s) = R^2 Cs\, I_2(s) + 4R\cdot I_2(s) + \frac{3}{C s} I_2(s)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_2(t)\cdot dt$$

$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$$U_2(s) = \frac{1}{C\cdot s} I_2(s)$$

$$U_2(s) = I_2(s)\cdot\frac{1}{C\cdot s}$$

$$U_1(s) = I_2(s)\left(R^2Cs + 4R + \frac{3}{C s}\right)$$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{R^2C^2s^2 + 4RCs + 3}$$

$$U_2(s) = G(s)\cdot U_1(s) = G(s)\cdot U_0$$

Vgl. Maple–Vorlage

Manfred Vogel

5.) Lösen Sie die DG's der Aufgabe 3.) der Serie 3.23 mit der Prädiktor–Korrektor–Methode, welche auf dem Adams–Bashford–Dreischritt und dem Adams–Moulton–Zweischritt Verfahren beruht. Bestimmen Sie die notwendigen Startwerte mit dem Euler–Verfahren.

Vgl. Maple–Vorlage