Mathematik Lösungen 3.4

1.) Die ersten drei nichtverschwindenden Terme der MacLaurin Reihe für die Arkustangensfunktion ergeben das Polynom : $P_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

Bestimmen Sie mit dem Taylor'schen Satz eine obere Schranke für den Fehler der folgenden Approximation von π, wenn Sie das Polynom anstelle des Arkustanges benutzen :

$$\pi = 16 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \quad .$$

Vgl. Maple–Vorlage

2.) Bestimmen Sie beim obigen Problem den absoluten und relativen Fehler, wenn Sie mit 4 signifikanten Stellen rechnen und dabei

a.) auf 4 Stellen runden, b.) nach 4 Stellen abbrechen.

Vgl. Maple–Vorlage

3.) Bestimmen Sie die Konvergenzgeschwindigkeiten von :

a.) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h) - h \cdot \cos(h)}{h} = ?$ b.) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1 - e^h}{h} = ?$

c.) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = ?$ d.) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} = ?$

Vgl. Maple–Vorlage

4.) Welcher *float*–Zahl entspricht (in Java) die Bitfolge :

1	1000 1000	100 1000 1000 0000 0000 0000

Verwenden Sie eine Java–Applikation um Ihre Antwort zu überprüfen. Bestimmen Sie mit dieser Applikation auch die Bitfolge der *float*–Zahl -2.9999997 .

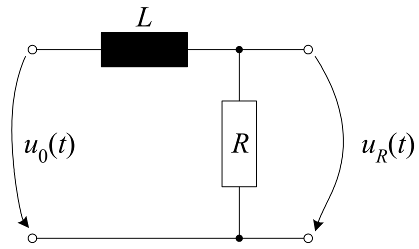
–802.00

1	**1000 0000**	**011 1111 1111 1111 1111 1111**

5.) Der Spannungsverlauf an einem RL–Glied wird durch die DG beschrieben :

$$u_R(t) = u_0(t) - \frac{L}{R} \cdot \dot{u}_R(t) \ .$$

Berechnen und skizzieren Sie $u_R(t)$, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ folgende Spannungsquelle eingeschaltet wird :



a.) $u_0(t) = U_0$ b.) $u_0(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

a.)

$$u_R = U_0 - \frac{L}{R} \cdot \dot{u}_R$$

$$\dot{u}_R + \frac{R}{L} u_R = \frac{R}{L} \cdot U_0$$

$$F(t) = \int \frac{R}{L} \cdot dt = \frac{R}{L} t \quad \Rightarrow u_{R_{hom}} = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

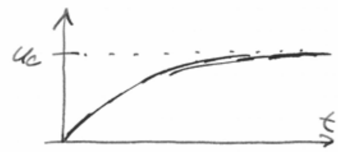
$$C(x) = \int \frac{R}{L} U_0 \, e^{\frac{R}{L} t} dt = \frac{U_0 R}{L} \cdot \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t}$$

$$y_p = U_0 \cdot e^{\frac{R}{L} t} \cdot e^{-\frac{R}{L} t} = U_0$$

$$\Rightarrow u_R(t) = U_0 + C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Anfangsbed. : $u_R(0) = 0 = U_0 + C \Rightarrow C = -U_0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u_R(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right)}}$$



b.)

$$u_{R\,hom} = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \quad \text{wie oben}$$

$$C(x) = \int \frac{R}{L} U_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot e^{\frac{R}{L} t} dt = \frac{R \cdot U_0}{L} \left(\frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t}{L\left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right)} - \frac{\omega e^{\frac{Rt}{L}} \cos \omega t}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} \right)$$

$$= \frac{e^{\frac{Rt}{L}} \cdot L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(\frac{U_0 R^2 \sin(\omega t)}{L^2} - \frac{U_0 R \omega}{L} \cos \omega t \right)$$

$$u_{R\,part} = \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(R^2 \sin \omega t - R \omega L \cos \omega t \right)$$

$$u_R(t) = C \cdot e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(R^2 \sin \omega t - R \omega L \cos \omega t \right)$$

Anfangsbed. $u_R(0) = 0 = C + \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (-R \omega L)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u_R(t) = \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(R^2 \sin \omega t - R \omega L \cos \omega t - R \omega L \, e^{-\frac{Rt}{L}} \right)}}$$