Fachhochschule Aargau
Nordwestschweiz

Mathematik Lösungen 4.12

1.) Bestimmen Sie nach dem Orthogonalisierungsverfahren von Gram–Schmidt Polynome vom Grade $n \le 10$ auf dem Intervall $-1 \le x \le 1$ für die Gewichtsfunktion

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad .$$

Vergleichen Sie weiter die so erhaltenen Polynome mit den rekursive definierten Tschebyschew–Polynomen :

$$T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = x \qquad \text{und} \qquad T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad \text{für} \quad n \ge 1 \ .$$

Vgl. Maple–Vorlage

2.) Approximieren Sie mit Tschebyschew–Polynomen die Funktion $f(x) = \sin(x)$ auf dem Intervall $-1 \le x \le 1$.

Vgl. Maple–Vorlage

3.) Approximieren Sie mit einer Padé–Approximation 6. Grades mit $n = m = 3$ die Funktion $f(x) = \sin(x)$ auf dem Intervall $-\pi \le x \le \pi$ und vergleichen Sie das Resultat mit dem entsprechenden MacLaurin–Polynom 6. Grades.

(Lösen Sie dieses Problem von „Hand“, d.h. versuchen Sie nicht, einen allgemeinen Padé–Algorithmus zu programmieren)

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3}{1 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3} \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots$$

$$\Rightarrow p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 \approx \left(1 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots\right)$$

Koeffizientenvergleich:

x^0 : $p_0 = 0$

x^1 : $p_1 = 1$

x^2 : $p_2 = q_1$

x^3 : $p_3 = q_2 - \frac{1}{6}$

x^4 : $0 = -q_1 \cdot \frac{1}{6}$

x^5 : $0 = -q_2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5!}$

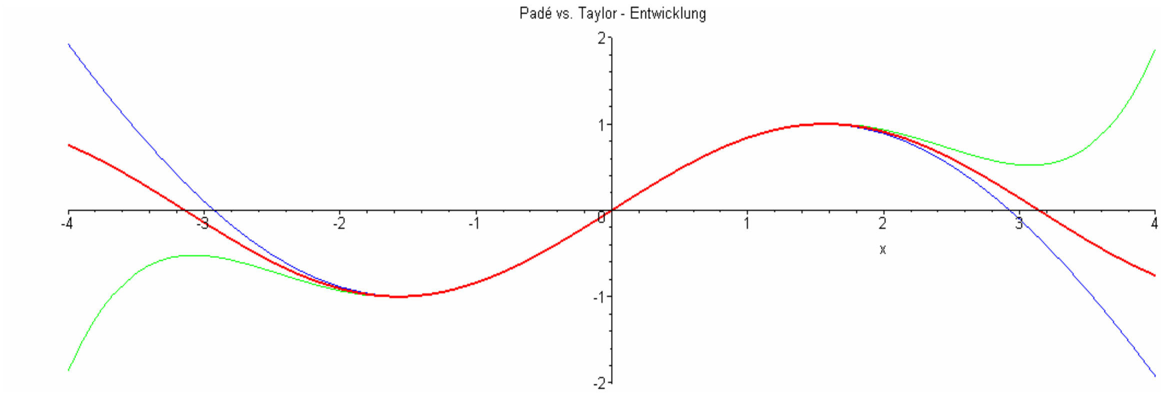
x^6 : $0 = q_1 \frac{1}{5!} - q_3 \frac{1}{3!}$

$\Rightarrow q_1 = 0 = p_2 = q_3$

$q_2 = \frac{6}{5!} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{20}$

$\hookrightarrow p_3 = \frac{1}{20} - \frac{1}{6} = \frac{-7}{60}$

$$\Rightarrow r(x) = \frac{x - \frac{7}{60}x^3}{1 + \frac{1}{20}x^2} = \frac{60x - 7x^3}{60 + 3x^2}$$



4.) Berechnen Sie die Fourier–Transformierte und das Powerspektrum der Funktion

$$f(t) = \sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot f_2 \cdot t) \qquad \text{mit} \qquad f_1 = 2\ \mathrm{Hz} \quad \text{und} \quad f_2 = 20\ \mathrm{Hz}$$

indem Sie diese Funktion im Bereich 0 bis $1\,\mathrm{sec}$ an 256 Punkten abtasten.
„Filtern" Sie nun in der Fouriertransformierten alle Frequenzen grösser $10\ \mathrm{Hz}$ weg und berechnen Sie die Rücktransformierte.

Vgl. Maple–Vorlage

5.) Der Eingang von Nachrichten auf einem Mail–Server kann als Poisson–Prozess mit einer Durchschnittsrate von 270 Nachrichten pro Minute modelliert werden. Der Server Ausgang hat eine Übertragungsrate von 2400 Zeichen (*characters*) pro Sekunde. Die Länge der Nachrichten (inkl. Kontrollzeichen) ist näherungsweise exponentialverteilt mit durchschnittlich 480 Zeichen.

a.) Bestimmen Sie die statistischen Grössen dieser Warteschlange unter der Annahme, dass diese über einen sehr grossen Buffer verfügt.

Taktlänge :	$h = 1$ min
Ankunftsrate :	$\lambda = 270$ min^{-1}
Mittlere Anzahl Ankünfte pro Takt :	$\lambda \cdot h = 270$
Mittlere Wartezeit :	$1/\lambda = 1/270$ min
Bedienrate :	$\mu = 60{\cdot}2400\ /\ 480$ min $= 300$ min^{-1}
Auslastung (*traffic intensity*):	$p = \lambda/\mu = 270/300 = 0.9$
Mittlere Kundenzahl :	$EX_n = p/(1{-}p) = 0.9/0.1 = 9$
Mittlere Verweildauer :	$EW = 1/(\mu - \lambda) =$ min $/(300{-}270) = 1$ min $/\ 30 = 2$ s

b.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich $n \geq 10$ Nachrichten in der Warteschlange ?

$P[N = n] = (1 - p) \cdot p^n$: Wahrscheinlichkeit, dass sich genau n Nachrichten im System befinden.

$P[N = 0] = (1 - p) = 0.1$

$P[N = 1] = (1 - p) \cdot p = 0.09$

$P[N = 2] = (1 - p) \cdot p^2 = 0.081$

$\ldots$

Erwartungswert : $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-p) \cdot p^k = \frac{p}{1-p}$

Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens 10 Nachrichten in der Warteschlange befinden ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens 11 Nachrichten im System befinden :

$$\sum_{k=11}^{\infty} (1-p) \cdot p^k = p^{11} = 0.314$$

c.) Wie gross wird die mittlere Verweilzeit (*response time*), wenn die Eingangsrate um 5% erhöht wird ?

Die Verweildauer $EW(\lambda) = \frac{1}{\mu - \lambda}$ erhöht sich auf 3.636 Sekunden.