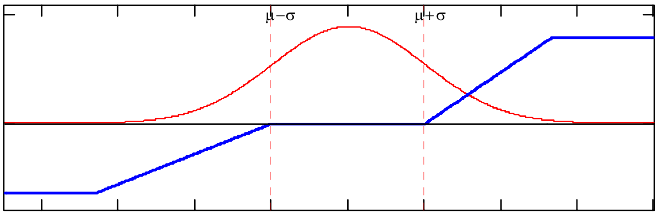
Mathematik Lösungen 4.13

1.) Eine Firma offeriert Ihren Kunden eine neue technologische Komponente (nennen wir diese NTF, *New Technology Feature*), welche eine Leistung produziert, die durch eine Normalverteilung mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ beschrieben werden kann. Liegt die tatsächlich gemessene Leistung P im Bereich $\mu \pm \sigma$, so sind Käufer und Verkäufer zufrieden. Ist $P > \mu + \sigma$, so erhält die Firma einen Bonus Bo pro übertroffene Leistungseinheit, höchstens aber Cap_+. Ist jedoch $P < \mu - \sigma$, so muss die Firma einen Malus von Ma pro nicht erreichte Leistungseinheit bezahlen, höchstens aber Cap_- (vgl. Bild).

Bonus/Malus - Zahlungen



Berechnen Sie, mit welchem mittleren Bonus/Malus die Firma rechnen muss und bestimmen Sie dafür auch die Standardabweichung, wenn :

$$\mu = 12\,, \quad \sigma = 2\,, \quad Bo = 3\,, \quad Ma = 1.75\,, \quad Cap_+ = 10\,, \quad Cap_- = 8.$$

Vgl. Java– und Maple–Vorlagen

2.) Zeigen Sie mit einem beliebigen Beispiel, dass die DFT und die in Maple implementierte FFT identische Resultate liefern. Erzeugen Sie dazu mit einer beliebigen Funktion ein an N Punkten abgetastetes Signal. Achten Sie darauf, N nicht zu gross zu wählen, da die DFT sonst zuviel Rechenzeit benötigt.

Berechnen Sie anschliessend die inverse Fouriertransformierte, sowohl als selber programmierte inverse DFT als auch mittels Maple–Routine.

Vgl. Maple–Vorlage

3.) Wir betrachten nochmals den Mail–Server der Übung 4.12.5 (Poisson–Prozess mit einer Durchschnittsrate von 270 Nachrichten pro Minute, Übertragungsrate 2400 Zeichen pro Sekunde, exponentiell verteilte Nachrichtenlänge mit durchschnittlich 480 Zeichen).

Wir möchten nun aber die Bufferzahl K (Warteraum) möglichst klein wählen, wobei jedoch gewährleistet werden soll, dass eine Nachricht nur mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner 0.001 abgewiesen wird (keinen Platz mehr findet im Warteraum).

Berechnen Sie für das so ermittelte Bediensystem $M/M/1/K$ die durchschnittliche Anzahl Nachrichten im System, die durchschnittliche Anzahl Nachrichten in der Warteschlange, die durchschnittliche Bedienzeit und die Durchschnittliche Verweilzeit im System.

Taktlänge :	$h = 1$ min
Ankunftsrate :	$\lambda = 270$ min^{-1}
Bedienrate :	$\mu = 60 \cdot 2400 / 480$ min $= 300$ min^{-1}
Auslastung (*traffic intensity*):	$p = \lambda / \mu = 270/300 = 0.9$ Erlangs

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau n Nachrichten im System befinden, ist somit :

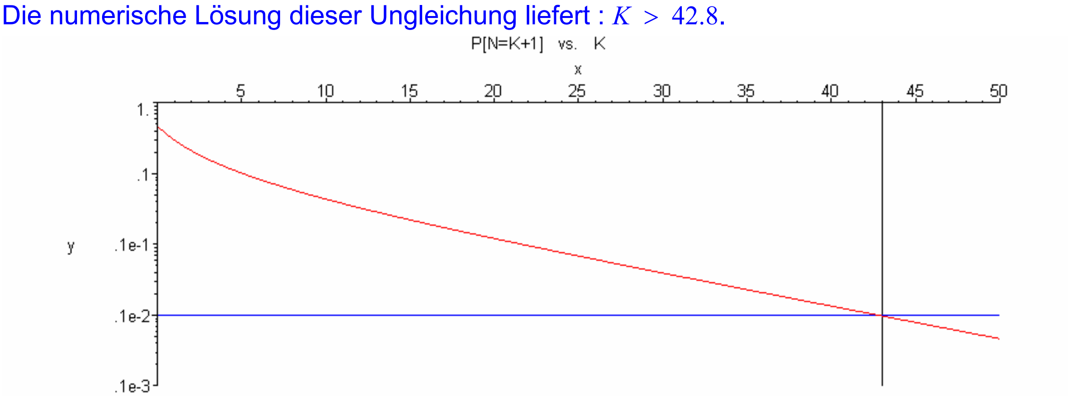
$P[N = n] = p_0 \cdot p^n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, K{+}1$

wobei $1 = \sum_{k=0}^{K+1} p_0 \cdot p^k = p_0 \cdot \sum_{k=0}^{K+1} p^k = p_0 \cdot \frac{1-p^{K+2}}{1-p}$ sein muss.

Damit folgt : $p_0 = \frac{1-p}{1-p^{K+2}}$ und $P[N = n] = \frac{1-p}{1-p^{K+2}} \cdot p^n$

Nun muss gelten : $P[N = K+1] = \frac{1-p}{1-p^{K+2}} \cdot p^{K+1} < 0.001$

Die numerische Lösung dieser Ungleichung liefert : $K > 42.8$.



Der Buffer muss also $K = 43$ Warteplätze aufweisen.

Mit diesem K ergibt sich für die durchschnittliche Anzahl Nachrichten im System :

$$EX = \sum_{n=0}^{K+1} n \cdot \frac{1-p}{1-p^{K+2}} \cdot p^n = \sum_{n=0}^{44} n \cdot \frac{1-p}{1-p^{45}} \cdot p^n \approx 8.603$$

Die durchschnittliche Anzahl bedienter Nachrichten ist :

$$0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = 1 - \frac{1-p}{1-p^{K+2}} = 1 - \frac{1-p}{1-p^{45}} \approx 0.899$$

uns somit die durchschnittliche Anzahl Nachrichten in der Warteschlange :

$$8.603 - 0.899 = 7.705$$

Da eingehende Nachrichten abgewiesen werden, wenn $K{+}1$ Nachrichten im System sind, reduziert sich die durchschnittliche Ankunftsrate auf :

$$\lambda_a = \lambda \cdot (1 - p_{K+1}) \approx 269.736$$

Nach dem Gesetz von Little wird die durchschnittliche Verweilzeit resp. Wartezeit :

$$\frac{EX}{\lambda_a} = 1.91\,\text{s} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{7.705}{269.736} \cdot 60\,\text{s} = 1.71\,\text{s}$$