Mathematik Lösungen 4.15

Name :	Punkte:
1.) In der beiliegenden Datei „`Tsunami.dat`“ finden Sie Messdaten von einem Erdbeben, welche am 26. Dez. 2004 von einer Messstation auf Cocos Island aufgezeichnet wurden. Berechnen Sie das Powerspektrum dieser Messreihe und bestimmen Sie die 3 dominantesten Frequenzen. **Vgl. Maple–Vorlage**	4
2.) Einer Schachtel, die 5 Karten mit den Zahlen 1, 1, 2, 2 und 3 enthält, werden zufällig 2 Karten entnommen. Es sei X die Summe und Y die grössere der beiden Zahlen. Berechnen Sie die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X,Y)$ und den Korrelationskoeffizienten $\rho(X,Y)$.	4

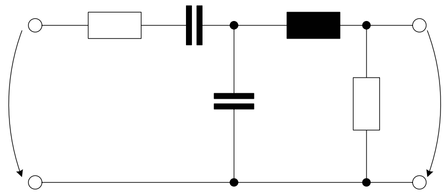
X \ Y	1	2	3	f_X
2	2/20	0	0	0.1
3	0	8/20	0	0.4
4	0	2/20	4/20	0.3
5	0	0	4/20	0.2
f_Y	0.1	0.5	0.4	

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[X\cdot Y] - E[X]\cdot E[Y]$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma[X]\cdot\sigma[Y]}$$

weiter in Maple–Vorlage

3.)



a)

$$U_2 = I_2 \cdot R$$

$$U_C = \frac{I_1}{C\cdot s} = I_2\cdot R + I_2\cdot L\cdot s = I_2(R + Ls)$$

$$\Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = RCs + LCs^2$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{I_2\cdot R}{\frac{I_1}{Cs} + (I_1+I_2)\left(R+\frac{1}{C\cdot s}\right)} = \frac{RC\cdot s\cdot I_2}{I_1 + (I_1+I_2)(RCs+1)}$$

$$= \frac{RCs}{\frac{I_1}{I_2} + \left(\frac{I_1}{I_2}+1\right)(RCs+1)} = \frac{RCs}{(RCs+LCs^2)+(RCs+LCs^2+1)(RCs+1)}$$

$$= \frac{RCs}{RCs+\cancel{LCs^2}+(RCs)^2+RCs+RLC^2s^3+\cancel{LCs^2}+RCs+1}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{RCs}{RLC^2\cdot s^3 + s^2(2LC+R^2C^2) + 3RC\cdot s + 1}$$

b)

$$u_1(t) = U_0\cdot\delta(t) \Rightarrow U_1(s) = U_0$$

$$\Rightarrow U_2(s) = U_0\cdot G(s)$$

3.) Bestimmen Sie für den skizzierten Vierpol :

a.) Die Übertragungsfunktion $\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$. **5**

b.) Die Antwort $u_2(t)$, wenn $u_1(t) = U_0 \cdot \delta(t)$ ist, mit $U_0 = 6\,\mathrm{V}$, $R = 20\,\Omega$, $C = 0.02\,\mathrm{F}$ und $L = 1\,\mathrm{H}$.

c.) Zu welchem Zeitpunkt erreicht die Stossantwort unter b.) ihren Maximal– resp. Minimalwert ? Wie gross sind diese ?

Vgl. Maple–Vorlage

4.) Konstruieren Sie nach dem Verfahren von Gram–Schmidt orthogonale Polynome auf dem Intervall $[\,0\,,\,\infty\,[$ bezüglich der Gewichtsfunktion $w(x) = e^{-x}$.

a.) Geben Sie die ersten 6 dieser Polynome an. **2**

b.) Approximieren Sie mit diesen Polynomen die Funktion $f(x) = \ln(x+1)$ auf dem Intervall $[\,0\,,\,\infty\,[$ und geben Sie das resultierende Approximationspolynom vom Grade 6 an. **3**

Vgl. Maple–Vorlage

5.) Nähern Sie die Funktion $f(x) = \ln(x)$ durch eine Padé–Approximation 6. Grades mit $n = 4$ und $m = 2$ in der Umgebung von $x = 1$ an. Entwickeln Sie dazu die Funktion $f(x)$ in eine Taylor–Reihe bezüglich $x = 1$. Wie lautet die entsprechende rationale Näherungsfunktion **4**

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1 \cdot (x-1) + p_2 \cdot (x-1)^2 + p_3 \cdot (x-1)^3 + p_4 \cdot (x-1)^4}{1 + q_1 \cdot (x-1) + q_2 \cdot (x-1)^2} \quad ?$$

Reine **Maple–Lösungen werden nicht berücksichtigt**; diese können aber zur Kontrolle verwendet werden.

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - + \ldots$$

$$\approx r(x) = \frac{p_0 + p_1(x-1) + p_2(x-1)^2 + p_3(x-1)^3 + p_4(x-1)^4}{1 + q_1(x-1) + q_2(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \left[(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - + \ldots\right] \cdot \left(1 + q_1(x-1) + q_2(x-1)^2\right)$$

$$\approx p_0 + p_1(x-1) + p_2(x-1)^2 + p_3(x-1)^3 + p_4(x-1)^4$$

Koeffizientenvergleich von Potenzen von $(x-1)$:

$$\begin{array}{lll}
(x-1)^0 : & \underline{p_0 = 0} & \\
(x-1)^1 : & \underline{p_1 = 1} & \\
(x-1)^2 : & p_2 = & q_1 - \frac{1}{2} \\
(x-1)^3 : & p_3 = & q_2 - \frac{1}{2} q_1 + \frac{1}{3} \\
(x-1)^4 : & p_4 = & -\frac{1}{2} q_2 + \frac{1}{3} q_1 - \frac{1}{4} \\
(x-1)^5 : & 0 = & \frac{1}{3} q_2 - \frac{1}{4} q_1 + \frac{1}{5} \\
(x-1)^6 : & 0 = & -\frac{1}{4} q_2 + \frac{1}{5} q_1 - \frac{1}{6}
\end{array}$$

weiter in Maple–Vorlage

Zeit : $1^{h}\ 30^{min}$ **Maximale Punktezahl : 22** **Note 6 für 20 Punkte**