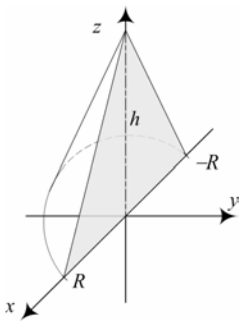
Mathematik Lösungen 4.2

Name :	Punkte:
1.) Die Zufallsvariable X wird beschrieben durch die Dichte : $$f(x)=\begin{cases} c_1\cdot x & 0\le x\le 2\\ c_2\cdot x^{-2} & 2< x\le 5\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$ Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu = E[X]$, die Varianz $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X]$ und $P[\,\mu-\sigma < X < \mu+\sigma\,]$ unter der Voraussetzung, dass f an der Stelle $x = 2$ stetig ist und bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$. **Vgl. Maple–Vorlage**	**4**
2.) Berechnen Sie (**exakt**) den Schwerpunkt des skizzierten Halbkegels mit der Höhe h und der halbkreisförmigen Grundfläche vom Radius R im gegebenen Koordinatensystem.  **Vgl. Maple–Vorlage**	**4**
3.) Die Biegesteifigkeit D einer Platte ist gegeben durch nebenstehende Formel. Der Elastizitätsmodul ist mit einem relativen Fehler von 6% bekannt, die Plattendicke mit 2% und die Querdehnungszahl (Poisson–Zahl) ν = 0.33 mit einem relativen Fehler von lediglich 20%. $$D=\frac{E\cdot d^3}{12\cdot(1-\nu^2)}$$ E : Elastizitätsmodul d : Plattendicke ν : Poisson–Zahl a.) Welchen relativen Fehler ergibt sich für die Plattensteifigkeit mit Hilfe des totalen Differentials ? b.) Welchen mittleren relativen Fehler erwarten Sie ? $$D=\frac{E\cdot d^3}{12\cdot(1-\nu^2)} \qquad \nu := 0.33$$ $$\Delta D := \left|\left(\frac{d}{dE}D\right)\cdot\Delta E\right| + \left|\left(\frac{d}{dd}D\right)\cdot\Delta d\right| + \left|\left(\frac{d}{d\nu}D\right)\cdot\Delta\nu\right| = \frac{d^3}{12\cdot(1-\nu^2)}\cdot\Delta E + 3\cdot\left[\frac{E\cdot d^2}{12\cdot(1-\nu^2)}\cdot\Delta d\right] + \frac{E\cdot d^3}{12}\cdot\frac{2\cdot\nu}{(1-\nu^2)^2}\cdot\Delta\nu$$ $$= \frac{E\cdot d^3}{12\cdot(1-\nu^2)}\cdot\frac{\Delta E}{E} + 3\cdot\left[\frac{E\cdot d^3}{12\cdot(1-\nu^2)}\cdot\frac{\Delta d}{d}\right] + \frac{E\cdot d^3}{12\cdot(1-\nu^2)}\cdot\frac{2\cdot\nu^2}{(1-\nu^2)}\cdot\frac{\Delta\nu}{\nu}$$ totales Differential : $$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta E}{E} + 3\cdot\frac{\Delta d}{d} + \frac{2\cdot\nu^2}{1-\nu^2}\cdot\frac{\Delta\nu}{\nu} = 6 + 3\cdot 2 + \frac{2\cdot\nu^2}{1-\nu^2}\cdot 20 = 16.888$$ mittlerer Fehler : $$\frac{\Delta D}{D} = \sqrt{6^2 + (3\cdot 2)^2 + \left(\frac{2\cdot\nu^2}{1-\nu^2}\cdot 20\right)^2} = 9.793$$	**3**

4.) Schreiben Sie ein Java–Programm zur Lösung der nachstehenden DG mit dem Runge–Kutta Verfahren 4. Ordnung. Wählen Sie für die Schrittweite $h = 0.01$ und geben Sie die approximative Lösung an den Stellen $t = 1$ und $t = 5$ an : $$\dot{x}(t) = \cos(2t) + \sin(3t) \qquad \text{mit} \qquad x(0) = 1 \; .$$ **Vgl. Java–Vorlage**	**5**
5.) Zwei Spieler A und B ziehen nacheinander aus einer Lostrommel mit 8 Kugeln (6 blaue, 2 rote) abwechselnd eine Kugel ohne Zurücklegen. Der Spieler A beginnt. Wer zuerst eine rote Kugel zieht, hat gewonnen. a.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler A gewinnt? b.) Wie viele Ziehungen sind im Mittel pro Spiel notwendig?	**4**

Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Ziehungen :

Ziehung k	$P[X=k]$	Gewinner
1	$\frac{2}{8}$	A
2	$\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}$	B
3	$\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}$	A
4	$\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}$	B
5	$\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$	A
6	$\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}$	B
7	$\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1$	A

$$\Rightarrow \; P[A \text{ gewinnt}] \;=\; 1-\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}-\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}-\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=1-\frac{3}{14}-\frac{1}{7}-\frac{1}{14}=\frac{14-3-2-1}{14}=\frac{4}{7}$$

b.) $$E[X]=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{(12\cdot 2+10\cdot 3+8\cdot 4+6\cdot 5+4\cdot 6+2\cdot 7)}{56}=\frac{14}{56}+\frac{(24+30+32+30+24+14)}{56}=\frac{168}{56}=3$$

Zeit : $1^{h}\ 30^{min}$ **Maximale Punktezahl: 20** **Note 6 für 20 Punkte**