Mathematik Lösungen 4.3

1.) Approximieren Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme

i.) mit dem Jakobi–Verfahren , *ii*.) mit dem Gauß–Seidel–Verfahren.

a.)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

b.)
$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 - 2x_3 &= 6 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= -11 \end{aligned}$$

c.)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 7 \end{aligned}$$

d.)
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 &= 5 \\ -x_2 + 4x_3 - x_6 &= 0 \\ -x_1 + 4x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2 \\ -x_3 - x_5 + 4x_6 &= 6 \end{aligned}$$

Vgl. Maple–Vorlage

2.) Für die Matrizen der Übungsaufgabe 1, Abschnitt 7.3 (Faires & Burden), ist folgendes zu bestimmen :

a.) $\| \, . \, \|_\infty = ?$ b.) $\| \, . \, \|_2 = ?$ c.) Ist die Matrix konvergent ?

Vgl. Maple–Vorlage

3.) Bestimmen Sie die Fourier–Reihe der nicht–periodischen (Knall–) Funktion $K(t)$. $K(t)$ ist überall gleich Null ausser im Intervall $-\alpha < t < \alpha$, wo der Funktionswert konstant gleich 1 ist.

Zeichnen Sie Fourier–Reihe und das zugehörige Amplitudenspektrum für den Fall $\alpha = 0.25$ auf.

Was geschieht, wenn Sie α sukzessive gegen Null streben lassen ?

Vgl. Maple–Vorlage

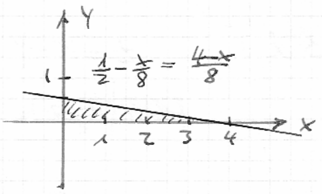
4.) Die zweidimensionale Zufallvariable $(X;Y)$ besitzt die Dichtefunktion :

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{für } x\geq 0 \;,\; y\geq 0 \text{ und } 8y+x\leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

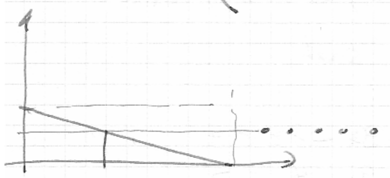
a.) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariablen $(X;Y)$.

b.) Bestimmen Sie die Randverteilungsfunktionen F_X und F_Y .

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\cdot du$$



$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{für } x<0 \text{ oder } y<0 \\ xy & \text{für } x\geq 0,\ y\geq 0,\ 8y+x\leq 4 \\ \frac{x}{16}(8-x)+4y(1-y)-1 & \text{für } 0\leq x\leq 4,\ 0\leq y\leq \frac{1}{2},\ 8y+x>4 \\ \frac{x}{16}(8-x) & \text{für } 0\leq x\leq 4,\ y>1/2 \\ 4y(1-y) & \text{für } x>4,\ 0\leq y\leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } x>4,\ y>1/2 \end{cases}$$



$x=4-8y$

$$y\cdot(4-8y)+(4-4+8y)\cdot\frac{y}{2}$$
$$=4y-8y^2+4y^2=4y-8y^2=4y(1-y)$$

etc.

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{für } x<0 \\ \frac{x}{16}(8-x) & \text{für } 0\leq x\leq 4 \\ 1 & \text{für } x>4 \end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & \text{für } y<0 \\ 4y(1-y) & \text{für } 0\leq y\leq 1/2 \\ 1 & \text{für } y>1/2 \end{cases}$$

c.) Sind die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig ?

$$F_X(1)\cdot F_Y\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}\cdot 7\cdot\frac{\cancel{4}\,1}{\cancel{4}}\cdot\frac{3}{4}=\frac{21}{64}\neq\frac{1}{4}=F\left(1,\frac{1}{4}\right)$$

$\Rightarrow$ X und Y sind stochastisch abhängig !

d.) Berechnen Sie für die Zufallsvariable $Z = X - Y$ die Dichtefunktion $g(z)$.

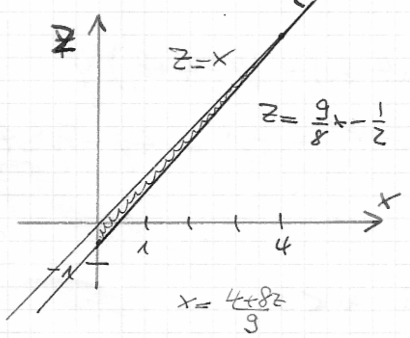
$$Z = X - Y$$

$$F_Z(z) = \iint_{x-y\le z} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-z} f_{X,Y}(u,v)\,dv \right) du$$

$$g_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, u-z)\,du$$

$$f(x, x-z) = \begin{cases} 1 & x \ge 0,\ x-z \ge 0,\ 8(x-z)+x \le 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$9x - 8z \le 4$$

$$\frac{9x-4}{8} \le z$$

$$x = \frac{4+8z}{9}$$

$$\frac{4+8z}{9} - z = \frac{4+8z-9z}{9}$$

$$g(z) = \begin{cases} 0 & z \le -\frac{1}{2} \text{ oder } z \ge 4 \\ \frac{4+8z}{9} & -\frac{1}{2} \le z \le 0 \\ \frac{4-z}{9} & 0 \le z \le 4 \end{cases}$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot g(z)\,dz = \int_{-1/2}^{0} \left(\frac{4z}{9} + \frac{8z^2}{9}\right) dz + \int_{0}^{4} \left(\frac{4z}{9} - z^2\right) dz$$

$$= \frac{2z^2}{9} + \frac{8z^3}{3\cdot 9}\Big|_{-1/2}^{0} + \frac{1}{9}\left(2z^2 - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^4 = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 32 - \frac{64}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{6}\left(-3 + 2 + 192 - 128\right) = \frac{63}{54} = \frac{7}{6}$$

e.) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen Z.

```
> E(Z):=int( z*(4+8*z)/9 , z=-1/2..0 ) + int( z*(4-z)/9 , z=0..4 );
```

$$E(Z) := \frac{7}{6}$$

```
> E(Z^2):=int( z^2*(4+8*z)/9, z=-1/2..0 ) + int( z^2*(4-z)/9,z=0..4 );
```

$$E(Z^2) := \frac{19}{8}$$

```
> Var(Z):=E(Z^2) - E(Z)^2 ;
```

$$\mathrm{Var}(Z) := \frac{73}{72}$$