Mathematik Lösungen 4.7

Vgl. Maple–Vorlage

1.) Der Geldfluss zwischen den 4 Wirtschaftsgebieten x_1 , x_2 , x_3 und x_4 kann als Markov–Kette durch die stochastische Matrix A beschrieben werden, d.h. die anteilmässige Verteilung der gesamten Geldmenge zur Zeit t_{n+1} ergibt sich aus der Verteilung zur Zeit t_n nach :

$$\vec{x}(t_{n+1}) = A \cdot \vec{x}(t_n) = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.20 & 0.15 & 0.15 \\ 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.15 \\ 0.20 & 0.40 & 0.25 & 0.15 \\ 0.20 & 0.10 & 0.30 & 0.55 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}(t_n) \quad .$$

a.) Stellen Sie die prozentuale Verteilung der Geldmenge in den ersten 10 Jahren dar, wenn sich ursprünglich alles Geld im Wirtschaftsgebiet 1 befindet.

b.) Bestimmen Sie die prozentuale Verteilung der gesamten Geldmenge auf die 4 Wirtschaftsgebiete nach unendlich langer Zeit.

c.) Hängt die „Schlussverteilung“ von der anfänglichen Verteilung ab ?

2.) Versuchen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des SOR–Verfahrens zu approximieren. Experimentieren Sie dafür mit dem Relaxationsfaktor im Bereich $1.1 \le \omega \le 1.3$:

a.)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

b.)
$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 - 2x_3 &= 6 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= -11 \end{aligned}$$

c.)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 7 \end{aligned}$$

d.)
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 &= 5 \\ -x_2 + 4x_3 - x_6 &= 0 \\ -x_1 + 4x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2 \\ -x_3 - x_5 + 4x_6 &= 6 \end{aligned}$$

3.) Ein Patient sucht einen Arzt auf und geht anschliessend mit der Wahrscheinlichkeit 0.5 noch zur Apotheke (um Medikamente zu holen). Die (stetige) Zufallsvariable X beschreibe die Dauer der Arztkonsultation (inkl. Wartezeit), die (diskrete) Zufallsvariable Y beschreibe die Zeit, welche für den Gang zur Apotheke notwendig ist. X und Y sind stochastisch unabhängig.

$$f(x) = \begin{cases} 6x \cdot (1-x) & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Y	0	1
$P(Y = i)$	0.5	0.5

a.) Bestimmen Sie die Dichtefunktion für die Zufallsvariable $Z = X + Y$.

b.) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen Z.