Mathematik Lösungen 4.8

1.) Approximieren Sie nach der Methode der kleinsten Quadrate die Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ mit einem Polynom vom Grade $n = 2$, 3 , 4 und 5. Stellen Sie die Approximation jeweils graphisch dar und kommentieren Sie das Resultat.

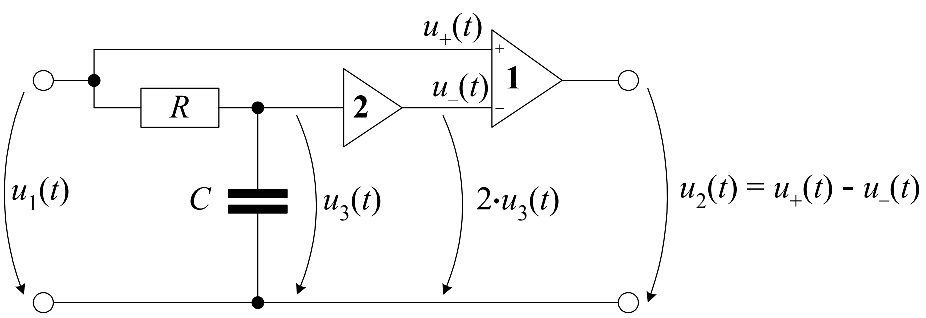
Vgl. Maple–Vorlage

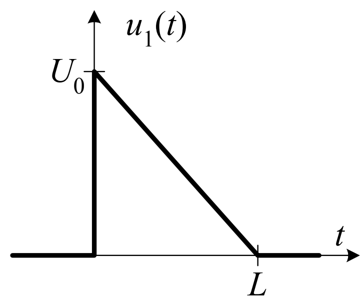
2.) Bestimmen Sie nach dem Orthogonalisierungsverfahren von Gram–Schmidt Polynome vom Grade $n = 0$, 1 , $2 \ldots 6$ auf dem Intervall $0 \leq x \leq \pi$ für die Gewichtsfunktion $w(x) \equiv 1$.

Vgl. Maple–Vorlage

3.) Approximieren Sie mit den Polynomen aus Aufgabe 2.) die Funktion $f(x) = \sin(x)$ mit der Gewichtsfunktion $w(x) \equiv 1$ auf dem Intervall $0 \leq x \leq \pi$. Verwenden Sie dafür Polynome vom Grade $n = 3$, 4 , 5 und 6.

Vgl. Maple–Vorlage





4.) Gegeben sei das rückseitig skizzierte aktive RC–Netwerk.

a.) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$.

b.) Bestimmen Sie die Laplace–Transformierte $U_1(s)$ der ebenfalls rückseitig skizzierten Eingangsspannung $u_1(t)$.

$$u_1(t) = i(t)\cdot R + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$$

$$U_1(s) = I(s)\cdot R + \frac{I(s)}{C\cdot s} = I(s)\cdot\left(R + \frac{1}{C\cdot s}\right)$$

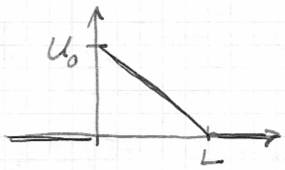
$$u_3(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt \Rightarrow U_3(s) = \frac{I(s)}{C\cdot s}$$

$$U_2(s) = U_1(s) - 2\,U_3(s)$$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{U_1(s)-2U_3(s)}{U_1(s)} = 1 - \frac{2\cdot I(s)}{C\cdot s\cdot I(s)\cdot R\left(1+\frac{1}{RCs}\right)}$$

$$G(s) = 1 - \frac{2}{RCs+1} = \underline{\underline{\frac{RCs-1}{RCs+1}}}$$

b.)



$$U_1(s) = \int_0^\infty u_1(t)\cdot e^{-s\cdot t}\,dt = \int_0^L \left(U_0 - \frac{U_0\cdot t}{L}\right)e^{-s\cdot t}\,dt$$

$$= \frac{U_0}{L}\cdot\frac{e^{-s\cdot L}+s\cdot L-1}{s^2}$$

c.) $U_2(s) = U_1(s)\cdot G(s)$

c.) Skizzieren Sie die Antwort $u_2(t)$ auf das unter b.) gegebene Eingangssignal $u_1(t)$, falls $U_0 = 10\,\mathrm{V}$, $R\cdot C = 2\sec$ und $L = 5\sec$ angenommen wird.
Bezeichnen Sie alle markanten Punkte (Extremalstellen, Nullstellen, Knickpunkte) der Ausgangsfunktion $u_2(t)$.

Vgl. Maple–Vorlage

5.) Ein Spieler hat 3 Franken. Bei jedem Spiel verliert er mit der Wahrscheinlichkeit ¾ einen Franken und gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit ¼ zwei Franken. Er beendet sein Spiel, wenn er kein Geld mehr hat oder 3 Franken dazu gewonnen hat.

a.) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix der Markov–Kette.

b.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 4 mal spielt ?

b.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler mit 6 Franken aufhört ?

Vgl. Maple–Vorlage