

Mathematik Prüfung 4.9

Name :	Punkte:
<p>1.) Sie würfeln wiederholt mit zwei Würfeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis „Augensumme ist 7“ vor dem Ereignis „Augensumme ist 5“ erscheint.</p> <p>a.) Analytische Lösung.</p> <p>a.) $p_7 = \frac{6}{36}$ Wahrscheinlichkeit 7 zu würfeln $p_5 = \frac{4}{36}$ " 5 zu würfeln $q = 1 - p_5 - p_7$; etwas anderes zu würfeln</p> <p>7 kommt vor 5: $p_7 + q \cdot p_7 + q^2 \cdot p_7 + q^3 \cdot p_7 + \dots$ $= p_7 (1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = p_7 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = p_7 \frac{1}{1-q}$ $= p_7 \cdot \frac{1}{p_5 + p_7} = \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{\frac{10}{36}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = \underline{\underline{0,6}}$</p> <p>b.) Lösung mittels Monte-Carlo Simulation.</p> <p>Vgl. Java-Vorlage</p>	<p>3 3</p>

2.) Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X; Y)$ besitzt die Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{für } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4

Bestimmen Sie die Dichtefunktion für die Zufallsvariable $Z = X + Y$ sowie den Erwartungswert $E[Z]$ und die Varianz $Var[Z]$.

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy dx = c \cdot 1^2 \cdot \pi = 1$
 $\Rightarrow c = \frac{1}{\pi}$

$Z = X + Y \Rightarrow Y = Z - X$

$G(z) = P[Z \leq z] = P[X + Y \leq z] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy dx$

$\frac{1}{\pi} \cdot \text{Kreisflächenabschnitt } K\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$

$\int_{-1}^{\frac{z}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} dy dt = \int_{-1}^{\frac{z}{\sqrt{2}}} 2\sqrt{1-t^2} dt$

$g(z) = G'(z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\frac{z}{\sqrt{2}}} 2\sqrt{1-t^2} dt \right) = \frac{1}{\pi} \cdot 2\sqrt{1-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{2-z^2}$
 für $-\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2}$

$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{2-z^2} & -\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Vgl. Maple-Vorlage

3.) Die 10×10 -Matrix A hat Elemente :

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ (i+k-1) \cdot 0.05 & \text{sonst} \end{cases}$$

6

Schreiben Sie ein C++ oder ein Java-Programm, welches für die Matrix A die Cholesky-Zerlegung berechnet.

Ist die Matrix A positiv definit? **Ja, weil Cholesky-Zerlegung möglich.**

Vgl. Java-Vorlage

