0. Rekapitulation wichtiger Begriffe

Zufallsexperiment
Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, dessen Ergebnis nicht im voraus exakt vorhergesagt werden kann.

Merkmalraum, Ereignisraum, Ereignismenge, Grundraum, Stichprobenraum Ω
Der Ereignisraum (Merkmalraum, Grundraum, Stichprobenraum) Ω ist die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes.

Elementarereignis ω
Ein Elementarereignis ω ist ein Element des Ereignisraums Ω. Die Elementarereignisse eines Ereignisraums sind die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes.

Ereignis
Ein Ereignis A ist eine Teilmenge des Ereignisraums Ω, mathematisch formuliert ($A \subset \Omega$), das heisst eine Kombination von Elementarereignissen.

Ereignissystem $\mathcal{A}$
Das Ereignissystem $\mathcal{A}$ ist die Klasse der beobachtbaren Ereignisse, das heisst die Menge der Teilmengen des Ereignisraums Ω.

1. Mathematisches Modell

Ein Zufallsexperiment und seine Resultate bestehen aus drei Aspekten:

1. Die möglichen Ergebnisse **Merkmalraum Ω**
2. Die möglichen Fragestellungen **Ereignis-System $\mathcal{A}$**
3. Die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten **Wahrscheinlichkeit *P***

2. Merkmalraum Ω

Definition Merkmalraum Ω
Unter einem *Merkmalraum* versteht man eine Menge Ω mit Elementen $\omega \in \Omega$. Der Merkmalraum gibt alle Möglichen Ausgänge eines Experiments an - jedes Element ω entspricht einer Möglichkeit.

Bemerkungen
Ein Element $\omega \in \Omega$ kann auch mehrere Merkmale beinhalten. Wenn ω selbst eine Menge von Merkmalen darstellt, spricht man von *zusammengesetzten Merkmalen* (siehe Beispiel 3). Weil die Auflistung aller Kombination selten sinnvoll ist, verwendet man hier üblicherweise das kartesische Produkt: $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_n$. Solche Produktreihen kann man (ähnlich wie beim Summenzeichen) abkürzen: $\times_{i=1}^{n} \Omega_i$. Es gibt sogar fälle, bei denen ω aus *unendlich* vielen Merkmalen besteht (z.B. Aktienkurs-Entwicklungen bis in die Ewigkeit).

Bsp. 1: *Münzwerfen*
Wenn man eine Münze wirft, landet sie entweder mit dem Kopf oder der Zahl oben. Also ist der Merkmalraum Ω = {Kopf, Zahl}. Für solche einfachen Merkmalräume verwendet man häufig auch $\Omega = \{0, 1\}$.

Bsp. 2: *Formel-1 Rundenzeiten*
In einem Formel-1-Rennen kann man die Rundenzeiten eines Fahrers auf Sekunden gerundet angeben. Damit wäre $\Omega = N_0 = \{0, 1, 2, ...\}$. Häufig wird aber eine Obergrenze definiert. Dann kann man $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 500\}$ annehmen, wobei $\omega = 500$ für „Rundenzeiten über 499 Sekunden" steht.

Bsp. 3: *Münzen überprüfen*
Ein Automat der Geldscheine entgegennimmt, überprüft jede Münze auf mehrere Echtheits-Merkmale. Die Gesamtresultat dieser Prüfungen ω besteht aus den Resultaten einzelner Teilprüfungen ω_1, ω_2, ω_3. Wenn 0 für „Prüfung nicht bestanden" und 1 für „Prüfung bestanden" steht, ist $\Omega = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), ... (1, 1, 1)\}$.

3. Ereignisse und das Ereignissystem A

Definition Ereignis

Ein *Ereignis A* ist eine Teilmenge von Ω - Also gilt $A \subset \Omega$. Ein Ereignis A tritt ein, wenn beim Experiment ein Ausgang $\omega \in A$ eintritt. Manchmal werden nur einige Teilmengen von Ω als Ereignis bezeichnet, manchmal werden alle Elemente der Potenzmenge P(Ω) als Ereignis bezeichnet.

Spezielle Ereignisse sind:

$A = \emptyset$	Ø ist ein unmögliches Ereignis welches nie eintritt
$A = \Omega$	Dieses Ereignis tritt immer ein
$A = \{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega$	Ein solches Ereignis nennt man *Elementar-Ereignis*.

Definition Ereignis-System $\mathcal{A}$

Die Menge aller Ereignisse bezeichnet man als Ereignis-System $\mathcal{A}$.

Bemerkungen

Bei Ereignissen kann man mit den üblichen Mengenoperationen arbeiten:

A oder B oder beide treten ein	$A \cup B$	
A und B treten ein	$A \cap B$	oder AB
A und B können nie gleichzeitig eintreten	$A \cap B = \emptyset$	oder „A und B sind disjunkt“
Nicht A (Komplementärmenge)	A^c	
A oder B, aber nicht beide treten ein	$A \Delta B$	oder $AB^c + A^cB$
A tritt ein, B aber nicht	$A \setminus B$	oder $A \cap B^c$
Mindestens ein A_i tritt ein	$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	
Alle A_i treten ein	$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$	

Wenn A und B disjunkt sind, ist es üblich A + B anstatt $A \cup B$ zu schreiben. Damit kann man auch das Summenzeichen ∑ verwenden. Wenn also die Schreibweise A + B oder das Summenzeichen ∑ verwendet wird, darf man davon ausgehen, dass die beteiligten Mengen disjunkt sind.

Wichtig: Die Mengenoperationen ∪ und ∩ sind kommutativ, assoziativ und distributiv. Weiter kann man mit den *DeMorgan-Regeln* solche Ausdrücke vereinfachen.

Indikatorfunktionen

Um die Darstellung von Ereignissen im Rechner zu vereinfachen, werden Indikatorfunktionen eingeführt. Die Indikatorfunktion 1_A gibt an, ob ein $\omega \in \Omega$ zum Ereignis gehört.

Wenn	$\omega \in A$	$1_A(\omega) = 1$
	$\omega \in A^c$	$1_A(\omega) = 0$

Damit gelten folgende Rechenregeln:

$$1_{A\cap B} = \min(1_A, 1_B) = 1_A * 1_B \qquad 1_{A^c} = 1 - 1_A$$

$$1_{A\cup B} = \max(1_A, 1_B) = 1_A + 1_B - 1_A * 1_B \qquad 1_{A\setminus B} = 1_A(1 - 1_B) = 1_A - 1_{AB}$$

Unendliche Mengen

Es gibt auch Merkmalräume Ω mit unendlich vielen Elementen, zum Beispiel $\Omega = \mathbb{R}$. Hier werden Ereignisse normalerweise als abgeschlossene Intervalle (a, b] betrachtet.

4. Zufallsvariablen

Definition Zufallsvariable
Unter einer *Zufallsvariablen X* verstehen wir eine Funktion, die jedem Elementarereignis ω aus Ω genau eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet. Zufallsvariablen werden in der Regel mit Grossbuchstaben (z. B. X, Y, Z) bezeichnet.

Mathematisch: $X:\ \Omega \to \mathbb{R}$ (oder Teilmenge davon)
$\omega \to X(\omega)$

Skizze:

Beispiel 1: *3-maliges Münzenwerfen*
Ein Münze wird 3 Mal geworfen. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl Köpfe (K). Das heisst, die Zufallsvariable kann die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen.

X: KKK $\to$ 3, ZKK $\to$ 2, ... , ZZZ = 0.

Beispiel 2: *Ziehen von Jasskarten*
Aus einem Set von Jasskarten wird jeweils eine Karte gezogen. Die Zufallsvariable Y bezeichne den Wert der gezogenen Jasskarte. Y kann die Werte 0, 2, 3, 4, 10 und 11 annehmen.

Z: Herz-Ass $\to$ 11, ..., Herz 6 $\to$ 0

Beispiel 3: *Evaluierung der Brenndauer von Glühbirnen*
Die Zufallsvariable Z bezeichne die Brenndauer von Glühbirnen.

Hier kann der Ereignisraum beliebige Werte zwischen 0 und ∞ umfassen, d. h. $\Omega = [0, \infty)$.

Bei den Beispielen 1 und 2 gab es endlich viele mögliche Werte der Zufallsvariablen. Zufallsvariablen, die endlich viele (oder abzählbar viele) Werte annehmen können, werden als ***diskrete Zufallsvariablen*** bezeichnet.
Im Beispiel 3 kann die Zufallsvariable unendlich viele Werte annehmen, es ist eine ***stetige Zufallsvariable***.

5. Relative Häufigkeit

Definition relative Häufigkeit/ empirisches Gesetz der grossen Zahlen

Wird ein Zufalls-Experiment n-mal unter gleichen Bedingungen wiederholt mit Beobachtungswerten $x_1, x_2, ..., x_n$, dann "konvergieren" die ***relativen Häufigkeiten***

$$h_n(A) \to \frac{1}{n}\left(Anzahl\ der\ x_i\ mit\ x_i \in\ A\right)$$

für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert. Diese Erfahrungstatsache nennt man ***empirisches Gesetz der grossen Zahlen***.

Obiger Grenzwert entspricht im übrigen auch der *Wahrscheinlichkeit* des Eintretens des Ereignisses A.

Beispiel:

Ereignis A: Würfeln einer geraden Zahl

Beim 10-maligen Werfen eines Würfels sollte in der Hälfte der Würfe eine gerade Zahl erscheinen. Dies ist auch bei einem "normalen" Würfel oft nicht der Fall. Beim 100'000-maligen Würfeln wird die relative Häufigkeit der gewürfelten geraden Zahlen nahe bei 0.5 liegen. Strebt die Anzahl Würfe gegen ∞ strebt die relative Häufigkeit gegen den Grenzwert 0.5.

6. Mass, Wahrscheinlichkeitsmass, Wahrscheinlichkeitsraum

Definition eines Masses über Ω, $\mathcal{A}$
Ein Mass auf $\mathcal{A}$ (bzw. über $(\Omega, \mathcal{A})$) ist eine Abbildung $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit:

(1) $\mu(A) \geq 0$,
(2) $\mu(\emptyset) = 0$
(3) $\mu(A_1 + A_2 + ...) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + ...$.

Definition Wahrscheinlichkeitsmass
Eine Abbildung $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heisst ***Wahrscheinlichkeits-Mass*** (W-Mass) auf $\mathcal{A}$, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$ für alle $A \in \mathcal{A}$ (Nichtnegativität)
(2) $P(\Omega) = 1$ (Normiertheit)
(3) $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (für paarweise sich ausschliessende Ereignisse A_i)

- Bedingung 1: Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A liegt zwischen 0 und 1
- Bedingung 2: Das sichere Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1
- Bedingung 3: Im Fall von 2 (disjunkten, d. h. gegenseitig ausschliessenden) Ereignissen A_1 und A_2 ergibt sich: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmassen (Überblick)

(1)	$P(A) \geq 0$	Nichtnegativität
(1')	$P(A) \leq 1$	
(2)	$P(\Omega) = 1$	Normiertheit
(2')	$P(\emptyset) = 0$	Nulltreue
(3)	$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$	Additivität
(3_n)	$P(A_1 + ... + A_n) = P(A1) + ... + P(An)$	
(3')	$P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$.	
(4)	$P(A^c) = 1 - P(A)$	Komplementäres Ereignis zu A
(5)	$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$	
(6)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	**Additionssatz**
(7)	$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$	Subadditivität
(8)	Aus $A \subset B$ folgt $P(A) \leq P(B)$	Monotonie

Bemerkung: Nach Vereinbarung schliessen sich bei (3), (3_n) und (3') die Ereignisse A_i gegenseitig aus, die Ereignisse sind also *disjunkt*.

Definiton Wahrscheinlichkeitsraum
Die drei Bausteine Ereignisraum (Ω), Ereignis-System $\mathcal{A}$ und *Wahrscheinlichkeitsmass P* nennt man den ***Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum)*** oder das ***Wahrscheinlichkeitsmodell (W-Modell).*** Das Wahrscheinlichkeitstripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ beschreibt mathematisch unser Zufallsexperiment.

7. Bernoulli-Experiment, Laplace-Experiment und Einpunktverteilung

Definition Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Modell, Bernoulli(p)-Verteilung:

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen heisst ***Bernoulli-Experiment***. Als Ereignisraum nutzt man $\Omega = \{0, 1\}$, dabei bezeichnet 1 "Erfolg" und 0 "Misserfolg".

Das W-Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bestehend aus $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = P(\Omega)$ und dem W-Mass P, das durch $P(\{1\}) = p$, $P(\{0\}) = 1-p$ mit $0 \le p \le 1$ festgelegt wird, heisst ***Bernoulli-Modell***, das W-Mass P entsprechend ***Bernoulli-Verteilung mit Parameter p*** oder ***Bernoulli(p)-Verteilung***, kurz B(p).

Definition Bernoulli-Experiment (andere Formulierung)

Als ***Bernoulli-Experiment*** bezeichnet man ein Zufallsexperiment, das n-mal wiederholt wird und bei dem jeweils das Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit $p(A) = p$ eintreten kann. Für jedes Einzelexperiment gibt es demnach nur 2 mögliche Ausgänge: A und Nicht-A. Das realisierte Ergebnis soll unabhängig von den Ausgängen vorheriger oder nachfolgender Experimente nur von der konstanten Wahrscheinlichkeit p abhängen.

Beispiele

- Münzenwurf (hier sollte der Parameter p=0.5 betragen).
- Feststellen defekter Geräte bei der Endprüfung im Produktionsprozess (Parameter p sollte möglichst nahe bei Null liegen).

Definition Laplace-Experiment, Laplace-Verteilung

Ein Zufallsexperiment mit endlich vielen und gleichwertigen Ausgängen heisst ***Laplace-Experiment***. Als Ereignisraum wählt man etwa $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Das W-Mass P auf $\mathcal{A} = P(\Omega)$ ergibt sich leicht aus $P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n)$ als $P(\omega_i) = 1/n$. Für die Wahrscheinlichkeit P(A) eines beliebigen Ereignisses A gilt dann:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{Anzahl\ der\ (für\ A)\ günstigen\ Fälle}{Anzahl\ der\ möglichen\ Fälle}$$

wobei |A| die Anzahl der Elemente von A bedeutet. Das W-Mass P heisst ***Laplace-Verteilung*** oder ***diskrete Gleichverteilung*** (über Ω). Wir werden hierfür auch die Abkürzung $L(\Omega)$ gebrauchen.

Definition Laplace-Experiment (andere Formulierung)

Bei einem ***Laplace-Experiment*** mit dem Ereignisraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_m\}$ besitzen alle Elementarereignisse ω_i die gleiche Wahrscheinlichkeit.
$p(\omega_i) = 1/m$.

Beispiel 1: *Würfel*
$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$: Die möglichen Augenzahlen beim Werfen eines Würfels.
|A|: Anzahl Möglichkeiten eine gerade Augenzahl zu werfen (ergibt 3).
$|\Omega|$: Anzahl der möglichen Fälle beim Würfeln (ergibt 6).

Beispiel 2: *Kontrolle von Werkstücken*
Bei zufälliger Entnahme eines Werkstückes aus z. B. 50 gleichartigen Stücken zu Kontrollzwecken muss jedes Stück die gleiche Chance haben gezogen zu werden (blindes Ziehen). Also wird jedes Stück die Wahrscheinlichkeit 1/50 haben, dass es gezogen wird.

Definition Einpunktverteilung

Es sei Ω ein Ereignisraum, $\mathcal{A}$ ein (beliebiges) Ereignis-System über Ω und $a \in \Omega$ ein (festes) ausgewähltes Ergebnis. Dann heisst das W-Mass P, definiert durch $P(A) = 1$, falls $a \in A$, und $P(A) = 0$ sonst, die ***Einpunktverteilung*** im Punkt a, kurz $P = \varepsilon_a$.

8. Additionssatz

Formulierung Additionssatz:
Für 2 sich gegenseitig ausschliessende Ereignisse A und B gilt nach dem 3. Wahrscheinlichkeitsaxiom (Kapitel 3):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder das Ereignis A ODER das Ereignis B eintritt, ist in diesem Sonderfall gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten von A und B.

Für 2 beliebige Ereignisse lautet der Additionssatz:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Falls es sich bei A und B um 2 sich ausschliessende Ereignisse handelt, dann ist $P(A \cap B) = 0$.

Beispiel: Ein homogener Würfel wird 2-Mal geworfen. Wie gross ist dabei die Wahrscheinlichkeit, *mindestens* 1-Mal die Augenzahl 6 zu würfeln?

Ereignis A: Augenzahl 6 beim ersten Wurf
Ereignis B: Augenzahl 6 beim zweiten Wurf

Die Aufgabe ist erfüllt, falls entweder das Ereignis A oder das Ereignis B eintritt (oder beide) eintreten:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$$

9. Bedingte Wahrscheinlichkeit/Multiplikationssatz

Bedingte Wahrscheinlichkeit:
Seien A, B Ereignisse in Ω und sei $P(B) > 0$. Dann heisst:

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Voraussetzung, dass das Ereignis B bereits eingetreten ist.

Aus der Umstellung obiger Formel folgt der ***Multiplikationssatz*:**
Die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen zweier Ereignisse A und B ist:

$$P(A \cap B) = P(B) * P(A|B)$$

Als Verallgemeinerung ergibt sich die *Verkettungsregel:*

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(A|B) * P(C|A \cap B)$$

Bemerkungen

- In der Regel ist $P(A|B) \neq P(A)$. Gleichheit herrscht nur, wenn die Ereignisse A und B unabhängig sind.
- Bei festem B können die Wahrscheinlichkeiten $P(.|B)$ als Wahrscheinlichkeiten über einem neuen Ereignisraum $\Omega^* = B$ aufgefasst werden (neue Normierung).

Beispiel:
Wir betrachten beim Würfeln die Ereignisse A={1, 2, 3, 4, 5} B={4, 5, 6}, sowie $A \cap B$={4, 5}. Mein Kollege würfelt und sagt mir nur, dass B eingetreten sei. Wie gross ist die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A wenn ich weiss, dass B eingetreten ist?

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

Wenn B eingetreten ist, liegen 4, 5 oder 6 Augen. Bei 4 oder 5 tritt auch A ein, bei 6 nicht.

Bemerkungen

- Im Fall $P(B) = 0$ definiert man gelegentlich $P(A|B) := 0$ oder auch $P(A|B) :=$ "unbestimmt".
- In der Regel ist $P(B|A) \neq P(B)$. Gleichheit besteht nur, wenn die Ereignisse A und B unabhängig sind bzw. sich ausschliessen.

10. Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit
Ist (A_i, $i \in I$) eine abzählbare Zerlegung von Ω, d. h. es gilt $\Omega = \sum_{i \in I} A_i$ und kennt man P(A_i) und die bedingten Wahrscheinlichkeiten P(B|A_i) für alle $i \in I$, dann gilt:

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} P(A_i) * P(B \mid A_i)$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit (andere Formulierung)
Seien A_1, ..., A_n Ereignisse, die eine Einteilung von Ω bilden, das heisst:

- $A_i \cap A_j = 0$ für $i \neq j$ (Ereignisse sind paarweise disjunkt)
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Dann gilt für $B \subset \Omega$: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) * P(B \mid A_i)$

Beispiel: *Blindes Ziehen von Kugeln aus einer Urne.*
In einer Urne hat es 3 rote Kugeln und eine blaue Kugel.
Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel rot ist ?

Lösung
Es gelten folgende Bezeichnungen:
- R1 = {erste gezogene Kugel ist rot}
- R2 = {zweite gezogene Kugel ist rot}
- B1 = {erste gezogene Kugel ist blau}

P(R2) = P(R1) * P(R2|R1) + P(B1) * P (R2|B1)
<u>P(R2)</u> = (3/4) * (2/3) + (1/4) * 1 = <u>3/4</u>

11.Formel von Bayes

Formel von Bayes
Sei $A_1, ..., A_n$ eine Einteilung (=abzählbare Zerlegung) von Ω. $P(B \mid A_j)$ sei bekannt für alle j.
Dann gilt: $P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k) * P(A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j) * P(A_j)}$

Beispiel (Bayes):
Eine Urne enthält 3 Münzen, bei denen die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf Kopf zu erhalten, gleich 0.8 bzw. 0.5 bzw. 0.2 ist. Aus dieser Urne wird eine Münze zufällig gezogen, welche dann zweimal hintereinander geworfen wird. Wir betrachten dann folgende Ereignisse:

- A_1 = Münze ist diejenige, bei der die Wahrscheinlichkeit für Kopf gleich 0.8 ist.
- B_i= i-ter Wurf ergibt Kopf. i=1, 2.

a) Berechne $P(A_1|B_1)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Münze diejenige ist, die durchschnittlich in 80 % der Würfe Kopf ergibt, unter der Bedingung, dass der erste Wurf Kopf ergeben hat.

b) Berechne $P(A_1|B_1 \cap B_2)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Münze diejenige ist, die durchschnittlich in 80 % der Würfe Kopf ergibt unter der Bedingung, dass die ersten beiden Würfe Kopf ergeben haben.

Lösung a)
Man teilt zuerst das Münzziehen in sich ausschliessende (disjunkte) Ereignisse auf:
A_i = Ziehen der i-ten Münze, $P(A_i)$ = 1/3, i=1, 2, 3.
$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$. A_1, A_2, A_3 sind eine Einteilung von Ω.
B_1: Erster Wurf ergibt Kopf.
Man verwendet nun das Theorem von Bayes.

$$P(A_1 \mid B_1) = \frac{P(B_1 \mid A_1) * P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_1 \mid A_i) * P(A_i)} = \frac{0.8 * \frac{1}{3}}{(0.8 + 0.5 + 0.2) * \frac{1}{3}} = \frac{8}{15}$$

Lösung b)

$$P(A_1 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2 \mid A_1) * P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_1 \cap B_2 \mid A_i) * P(Ai)} = \frac{0.8^2 * \frac{1}{3}}{(0.8^2 + 0.5^2 + 0.2^2) * \frac{1}{3}} = \frac{0.82}{0.93} = \frac{64}{93}$$

12.Stochastische Unabhängigkeit

Definition der stochastischen Unabhängigkeit für 2 bzw. 3 Ereignisse:

Zwei Ereignisse A und B heissen ***stochastisch unabhängig*** (bezüglich P), wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B).$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B ist völlig unabhängig davon, ob das Ereignis A eingetreten ist oder nicht.

Drei Ereignisse A, B und C sind unabhängig, falls gilt:

- $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A) * P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B) * P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$

Allgemeine Formulierung der stochastischen Unabhängigkeit

Die Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_n$ (oder allgemeiner A_i, $i \in \mathbb{N}$) in einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heissen ***stochastisch unabhängig*** (bezüglich P), wenn für alle endlichen Teilmengen $\{A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ik}\}$ von diesen Ereignissen die "Produkteformel" gilt:

$P(A_{i1}, A_{i2}, ... , A_{ik}) = P(A_{i1}) * P(A_{i2}) * … * P(A_{ik})$

Bemerkung:
die paarweise stochastische Unabhängigkeit von mehr als zwei Ereignissen hat **nicht** notwendigerweise die allgemeine stochastische Unabhängigkeit zur Folge.

Beispiel

A = { der 1. Würfel zeigt gerade Augenzahl }
B = { der 2. Würfel zeigt gerade Augenzahl }
C = { beide Würfel zeigen gerade oder beide Würfel zeigen ungerade Augenzahl }

$P(A) = ½ = P(B) = P(C)$
$A \cap B = \{ (2,2), (2, 4), (2, 6), … \}$
$P(A \cap B) = 9/36 = ¼$ A und B sind daher unabhängig
$P(A \cap C) = ¼$ A und C sind daher unabhängig
$P(B \cap C) = ¼$ B und C sind unabhängig
$A \cap B \cap C = A \cap B$ also $P(A \cap B \cap C) = ¼ \neq P(A) * P(B) * P(C) = 1/8$

Die 3 Ereignisse A, B und C sind somit nicht unabhängig.