STOCHASTIK

Teil 8

Binomialverteilung 1

Datei Nr. 34 110

September 2000

Friedrich W. Buckel

Internatsgymnasium Schloß Torgelow

Inhaltsverzeichnis

1.	Die Binomialverteilung	1
	Allgemeine Berechnungsformel	2
2.	Beispiele zu kompletten Verteilungen	3
	Histogramme	4
3.	Wo liegen die Maxima einer Binomialverteilung ?	8
4.	Angewandte Beispiele zur Binomialverteilung	11
5.	Arbeiten mit Tabellen zur Binomialverteilung	13
	Aufgaben	16
	Lösungen dazu	20
6.	Die Dreimal-Mindestens-Aufgabe	17
7.	Annahme-Wahrscheinlichkeiten	21

1. Die Binomialverteilung

Darunter versteht man eine Funktion der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Werte Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse sind. Es geht dabei um sogenannte Bernoulli-Ketten.

Unter einem **Bernoulli-Experiment** versteht man ein Experiment, das genau zwei mögliche Ausgänge hat

Beispiele von Bernoulliexperimenten:

(1) Ziehen von Kugeln aus einer Urne, die genau zwei Sorten enthält.
(2) Werfen einer Münze (Wappen - Zahl)
(3) Auswahl von Schüler (männlich - weiblich)
(4) Würfeln - wenn man etwa 6 oder nicht 6 unterscheidet bzw. 1 oder nicht 1.
(5) Testen eines Gerätes: defekt - gut

Führt man ein Bernoulli-Experiment n mal nacheinander durch, liegt eine n-stufige **Bernoulli-Kette** vor.

Beispiele für Bernoulliketten:

(1) 5-maliges Werfen einer Münze.
(2) Auswählen von 12 Schülern
(3) Ziehen von 8 Kugeln aus einer Urne, in der 4 rote und 12 weiße Kugeln liegen. Das Ziehen **muß** jedoch mit Zurücklegen erfolgen, weil sonst jeder weitere Zug ein neues, anderes Experiment mit veränderter Ausgangsmenge ist.
(4) Mehrfaches Testen eines Gerätes.

Beispiel:

Ein Würfel enthält zwei weiße und vier rote Felder. Er wird 10 mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man dabei genau 3 weiße Felder ?

Die Wahrscheinlichkeit für weiß ist $p_w = \frac{1}{3}$, entsprechend gilt $p_r = \frac{2}{3}$.
Um die Anzahl der gewürfelten weißen Felder zu erfassen, führt man eine Zählvariable ein, ihr offizieller Name ist **Zufallsvariable.** Man definiert:
Es sei X die Zahl der weißen Felder

Das Ereignis A: "Man zieht genau 3 weiße Kugeln" kann man damit so darstellen: A: X = 3.

Zu diesem Ereignis gehören viele Pfade, denn es gibt mehrere Möglichkeiten, unter 10 Würfen genau drei weiße zu erhalten.

Herleitung der Berechnungsformel:

Bei einer n-stufige Bernoulli-Kette mit den Ausgängen 1 und 2 komme der Ausgang 1 mit der Wahrscheinlichkeit p vor, dann ist 1 - p die Wahrscheinlichkeit des Ausgangs 2.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt der Ausgang 1 genau 3 mal vor ?

Definition der Zufallsvariablen X:
X sei die Zahl der Ausgänge 1.

Das Ereignis A: "Der Ausgang 1 kommt genau k mal vor" kann man damit so darstellen: A: X = k.

Zu diesem Ereignis gehören viele Pfade, denn es gibt mehrere Möglichkeiten, bei n Stufen genau drei mal den Ausgang 1 zu erhalten.

Es gibt genau so viele Pfade, wie es Möglichkeiten gibt, 3 weiße Kugeln auf 10 Plätze zu verteilen. Dies ist ein Problem der Kombinatorik: Man kann 3 Plätze aus 10 möglichen auf

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$$

Arten auswählen.

Jeder dieser 120 Pfade enthält drei weiße und 7 rote Felder, besitzt also die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^7$.

Damit folgt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A:

$$P(X=3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7 = 120 \cdot \frac{2^7}{3^{10}}$$

$$P(X=3) = 0,2601$$

Es gibt genau so viele Pfade, wie es Möglichkeiten gibt, 3 Elemente auf n Plätze zu verteilen. Dies ist ein Problem der Kombinatorik: Man kann 3 Plätze aus n möglichen auf

$$\binom{n}{3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-3)}{3!} = \ldots$$

Arten auswählen.

Jeder dieser $\binom{n}{3}$ Pfade enthält drei Plätze für Ausgang 1 und n-3 für Ausgang 2, besitzt also die Wahrscheinlichkeit $p^3 (1-p)^{n-3}$.

Damit folgt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A:

$$P(X=3) = \binom{n}{3} p^3 (1-p)^{n-3}$$

Allgemeine Berechnungsformel für die Binomialverteilung

Gegeben sei ein n-stufiges Bernoulli-Experiment mit den Ausgängen 1 und 2, wobei der Ausgang 1 mit der Wahrscheinlichkeit p auftritt.

X sei die Zufallsvariable "Zahl der Ausgänge 1" und

A das Ereignis "Der Ausgang 1 kommt genau k mal vor".

Dann gilt:

$$\boxed{P(A) = P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

Man verwendet dafür auch spezielle Funktionsschreibweisen.
Die beiden gebräuchlichsten sind

$$\boxed{f_B(k;n;p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}} \quad \text{und} \quad \boxed{B_{n;p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

Eine bestimmte Funktion hat n und p als gegeben Zahlen und k ist die Variable.
Für unser obiges Beispiel in der linken Spalte war n = 10, p = $\frac{1}{6}$:

$$f_B\left(k;10;\frac{1}{6}\right) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} \quad \text{bzw.} \quad B_{10;\frac{1}{6}}(k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

2. Beispiele zu kompletten Verteilungen

Beispiel 1

Ein idealer Würfel wird genau 10 mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von 0 bis 10 "Einsern".

Vorbereitung: (unbedingt zu schreibender Text)

Es liegt eine 10-stufige Bernoullikette mit den Ausgängen 1 oder $\bar{1}$ vor, denn die Wahrscheinlichkeit dieser Ausgänge bleibt in jeder Stufe konstant: $p_1 = \frac{1}{6}$.
X sei die Zufallsvariable "Zahl der Einser". X ist binomialverteilt.

Berechnung der Wertetafel der Binomialverteilung:

$$P(X=k) = f_B(k;10;\tfrac{1}{6}) = \binom{10}{k} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{10-k}$$

Es wird angeraten, nicht stur die Formel für die Binomialverteilung anzuwenden. Schon im 1. Fall "X=0" d.h. "Es werden keine Einser geworfen" kürzt folgende Überlegung die Rechnung ab: Auf dem zugehörigen Pfad steht 10 mal die $\bar{1}$:

$$\bar{1} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \bar{1} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \bar{1} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \bar{1} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \bar{1} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \bar{1} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \bar{1} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \bar{1} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \bar{1} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \bar{1} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{}$$

Dieser Pfad hat die Wahrscheinlichkeit $\left(\tfrac{5}{6}\right)^{10}$, so daß man die Formel wirklich nicht benötigt: $P(X=0) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}1615$

Entsprechend für X=1: Dann steht an einem der 10 Plätze eine 1 , also erhalten wir die Wahrscheinlichkeit $\left(\tfrac{1}{6}\right) \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^9$. Die 1 kann auf 10 Plätzen stehen, also folgt:

$$P(X=1) = 10 \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right) \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^9 \approx 0{,}3230$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^8 = \frac{10 \cdot 9}{2!} \cdot \frac{5^8}{6^{10}} \approx 0{,}2907$$

$$P(X=3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} \cdot \frac{5^7}{6^{10}} \approx 0{,}1550$$

$$P(X=4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^6 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} \cdot \frac{5^6}{6^{10}} \approx 0{,}0543$$

$$P(X=5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \frac{5^5}{6^{10}} \approx 0{,}0130$$

$$P(X=6) = \binom{10}{6} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot \frac{5^4}{6^{10}} \approx 0{,}0022$$

$$P(X=7) = \binom{10}{7} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^7 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} \cdot \frac{5^3}{6^{10}} \approx 0{,}0002$$

$$P(X=8) = \binom{10}{8} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^8 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 = \binom{10}{2} \cdot \frac{5^2}{6^{10}} \approx 0{,}0000186 \approx 0$$

$$P(X=9) = P(X=10) \approx 0$$

Bemerkungen zu diesen Berechnungen:

Man kann den Binomialkoeffizienten bekanntlich auf 2 Arten berechnen. Bis zu X=3 empfiehlt man das oben gezeigte ausführliche Vorgehen. Ab X=4 kann man dann mit den drei Fakultäten rechnen.
Bei X=0 sieht man, daß der Funktionswert so klein wird, daß man ihn also ungefähr 0 angeben darf, wenn man sich wie allgemein üblich an die vier Dezimalen nach dem Komma hält. Daher wird klar, daß auch die restlichen zwei Werte 0 sind:

Beispiel 2

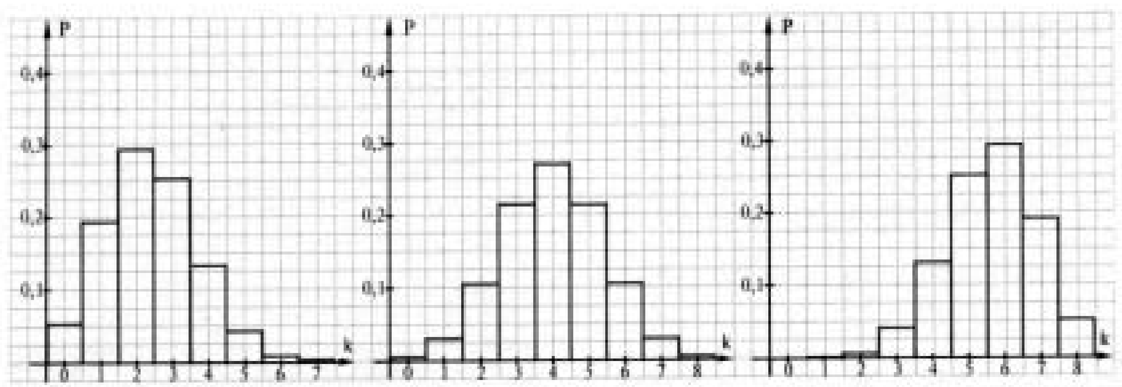
Berechne die Wertetafeln für die Binomialverteilung mit
a) n = 8 und p = 0,3.
b) n = 8 und p = 0,5
c) n = 8 und p = 0,7

Lösung:

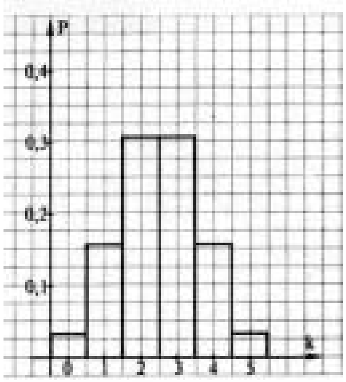
k	P(X=k) mit p = 0,3	P(X=k) mit p = 0,5	P(X=k) mit p = 0,7
0	$0{,}7^{10} = 0{,}0576$	0,0039	0,0001
1	$8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^{9} \approx 0{,}1977$	0,0313	0,0012
2	$28 \cdot 0{,}3^{2} \cdot 0{,}7^{6} \approx 0{,}2965$	0,1094	0,0100
3	$56 \cdot 0{,}3^{3} \cdot 0{,}7^{3} \approx 0{,}2541$	0,2188	0,0467
4	0,1361	0,2734	0,1361
5	0,0467	0,2188	0,2541
6	0,0100	0,1094	0,2965
7	0,0012	0,0313	0,1977
8	0,0001	0,0039	0,0576

Man kann diese Werte auch graphisch darstellen. Möglichkeiten sind
Stabdiagramm (senkrechte Striche, deren Länge die Wahrscheinlichkeit angibt)
Histogramm (Rechtecke der Breite 1, deren Höhe die Wahrscheinlichkeit angibt;
Weil die Rechtecksbreite 1 ist, stellt auch der Rechtecksinhalt die Wahrscheinlichkeit dar. Dies ist optisch günstiger als ein Stabdiagramm).
Kreisdiagramm (Hier werden die Wahrscheinlichkeiten in Winkel umgerechnet, so daß ein Vollkreis in n Sektoren aufgeteilt wird.
Weitere Schaubilder sind denkbar.

Hier die drei Histogramme zu unserer Tabelle:



Dabei fällt mehreres auf:



1. Zur Wahrscheinlichkeit p = 0,5 gehört immer ein achsensymmetrisches Diagramm, wobei die Achse in der Mitte liegt. Bei n = 8 liegt die Achse und auch das Maximum bei X = 4. Ist n ungerade, etwa n=5 und p = 0,5, dann ist der Mittelwert 2,5 , was zur Folge hat, daß die Werte P(X=2) und P(X=3) gleich groß sind. Das Schaubild weist dann zwei gleich hohe Rechtecke mit Maximalcharakter auf. (Abbildung rechts)

2. Im ersten Diagramm (p = 0,3) und im dritten Diagramm (p=0,7) haben wir ähnliche Verhältnisse: ***Spiegelt man*** die Rechtecksfläche von p = 0,3 an der Mittelachse X = 4, so entsteht die Rechtecksfläche zu p = 0,7.
Die Wertetafeln enthalten auch dieselben Zahlen, allerdings in entgegengesetzter Anordnung: $f_B(2;8;0{,}3) = f_B(6;8;0{,}7)$
allgemein: $f_B(k;n;p) = f_B(n-k;n;1-p)$

3. Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ist, und da die Rechtecksflächen genau diese Summe darstellen, müssen wir festhalten, daß die Summe dieser Rechtecksflächen1 den Wert 1 hat.

Diese Flächeninhaltsgeschichte hat eine weitreichende Bedeutung.

Die Anzahl der Werte einer Binomialverteilung ist durch den Umfang n festgelegt. In Beispiel 1 wurde 10 mal gewürfelt, dann können 0 bis 10 Einser vorkommen, also ist die Definitionsmenge für die Binomialverteilung
$D_B = \{0;1;2;...;10\}$, allgemein bei $D_B = \{0;1;2;...;n\}$.
Es gibt also stets n+1 Rechtecke (die manchmal eine so geringe Höhe (Wahrscheinlichkeit) haben, daß sie nur noch als Strich dargestellt werden können. Wenn wir also ein 100-stufiges Ereignis vorliegen haben, dann gibt es 101 Rechtecke, deren Flächeninhaltsumme nach wie vor 1 sein muß. Damit wird klar, daß mit zunehmendem n die Höhe der Histogrammrechtecke abnimmt.

Sehen wir uns dazu ein weiteres großes und sehr bedeutsames Beispiel an:

Beispiel 3

Eine Lostrommel enthält etwa 1000 Lose. Es ist bekannt, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn 0,3 ist. Wir beobachten fünf Kinder A, B, C, D und E bei ihrem Spielverhalten.

Uns interessiert X = Anzahl der Gewinne. Die Gewinnwahrscheinlichkeit müssen wir als konstant ansehen. (Die Argumentation - es könnten ja schon Gewinne gezogen worden sein, ist ohne Bedeutung, da ja auch Nieten gezogen werden, und wenn man nicht genau weiß, was bisher gezogen worden ist, gilt nach wie vor 0,3 als Gewinnwahrscheinlichkeit.

Kind A kauft 5 Lose, Kind B 10, Kind C kauft 20, D 50 und E 100 Lose. Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X.

Kind A: 5 Lose mit p = 0,3 $D_B = \{0;1;2;...;5\}$

$$P(X=k) = f_B(k;5;0,3) = \binom{5}{k} \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{5-k}$$

Zu n = 5 (A):

k	P(X=k)
0	0,1681
1	0,3602
2	0,3097
3	0,1323
4	0,0283
5	0,0024

Kind B: 10 Lose mit p = 0,3 $D_B = \{0;1;2;...;10\}$

$$P(X=k) = f_B(k;10;0,3) = \binom{10}{k} \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{10-k}$$

Zu n = 10 (B):

k	P(X=k)
0	0,0282
1	0,1211
2	0,2335
3	0,2668
4	0,2001
5	0,1019
6	0,0368
7	0,0090
8	0,0014
9	0,0001
10	0,0000

Kind C: 20 Lose mit p = 0,3 $D_B = \{0;1;2;...;20\}$

$$P(X=k) = f_B(k;20;0,3) = \binom{20}{k} \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{20-k}$$

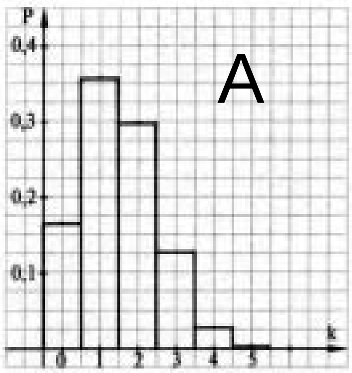
Kind D 50 Lose mit p = 0,3 $D_B = \{0;1;2;...;50\}$

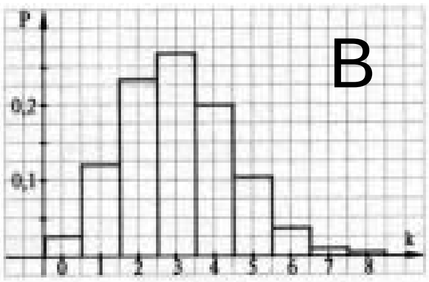
$$P(X=k) = f_B(k;50;0,3) = \binom{50}{k} \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{50-k}$$

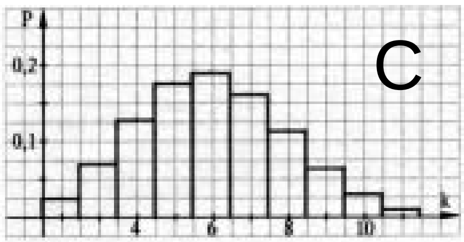
Kind E: 100 Lose mit p = 0,3 $D_B = \{0;1;2;...;100\}$

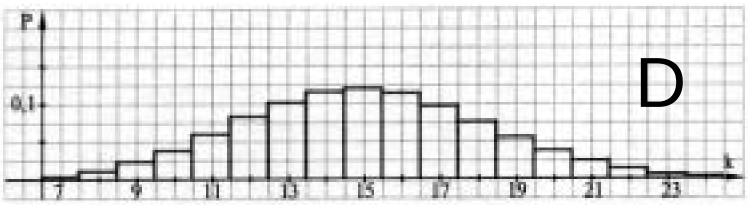
$$P(X=k) = f_B(k;100;0,3) = \binom{100}{k} \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{100-k}$$

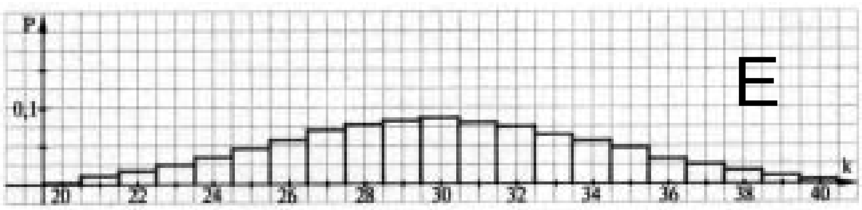
Hier die zugehörigen Histogramme zu diesen Funktionen











Die beiden unteren Histogramme reichen links und rechts weiter über die karierte Fläche hinaus. Dort sind die Höhen so gering, daß die Rechtecke nur noch als Striche darstellbar sind.

Auswertung: Mit zunehmendem n (und konstant gehaltenem p) wird das Histogramm immer breiter, flacher und niedriger.
Das Maximum verschiebt sich dabei immer weiter nach rechts.
Die Gesamtfläche behält den Inhalt 1 !

Wir wollen diese Bilder einmal durch den Inhalt unserer Aufgabe deuten.

Kind A hat nur 5 Lose. Die Chance darunter genau einen Gewinn zu finden, ist offenbar größer als alle anderen Spekulationen.

Kind B hat jedoch mehr Lose (10), also auch bessere Chancen, mehr als einen Gewinn zu erlangen. Die größte Wahrscheinlichkeit liegt hier bei 3 Gewinnen. Man sagt auch: Kind B kann mit 3 Gewinnen rechnen, d.h. 3 Gewinne erwarten. 3 ist also der Erwartungswert für die Zufallsvariable X bei 10 Ziehungen. Es ist jetzt sehr unwahrscheinlich, daß es nur 1 Gewinn zieht!

Kind C durfte 20 Lose ziehen. Es kann daher damit rechnen, 6 Gewinne zu ziehen. Dies ist jetzt der Erwartungswert für die Zufallsvariable X.

Kind D kaufte 50 Lose. Es kann daher mit 15 Gewinnen rechnen. Die Zufallsvariable X hat jetzt den Erwartungswert 15.

Kind E besitzt 100 Lose. Es kann daher mit 30 Gewinnen rechnen. Der Erwartungswert der Zufallsvariable X ist jetzt 30: E(X) = 30.

Man bezeichnet den Wert der Zufallsvariablen X als Erwartungswert, der mit der höchsten Wahrscheinlichkeit auftritt. Dort hat das Histogramm also sein Maximum.

Warnung: Diese Aussagen sind nur Mittelwerte über ganz viele Experimente. Wer einmal 10 Lose kauft, kann mit allem möglichen rechnen. Aus der zweiten Tabelle der vorangehenden Seite entnimmt man, daß man beispielsweise mit der Wahrscheinlichkeit 0,1019, also in 10 % aller Fälle mit 5 Gewinnen rechnen kann, und in 12 % aller Fälle gar nur mit einem Gewinn. Aber im Durchschnitt kommen wir über einen langen Zeitraum auf den Erwartungswert 3 zu.

Die Berechnung dieses Wertes ist einfach erklärt. Hat man bei einem Los die Gewinnchance p=0,3 , dann hat man bei 10 Ziehungen natürlich die 10-fache Chance, also $E(X) = 10 \cdot 0{,}3 = 3$.
So entsteht die Formel:

Der Erwartungswert der binomial verteilten Zufallsvariablen X ist $E(X) = n \cdot p$

Hier die Ergebnisse für unsere Beispiele mit p = 0,3

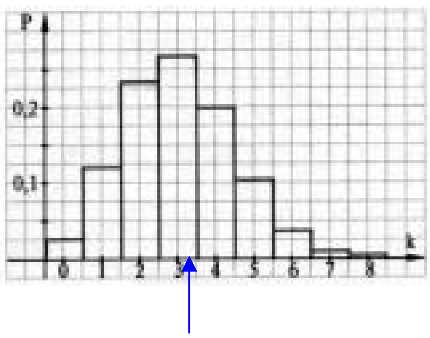
n	E(X)=np
5	1,5
10	3
20	6
50	15
100	30

Diese Werte sind Mittelwerte und gelten für sehr viele Experimente nur im Mittel. Die Werte stellen bei kleinen n außerdem nur näherungsweise die Lage der Maxima dar. Für n=5 und p = 0,3 erhält man E = 1,5 . Dies ist keine ganze Zahl. Wo liegt dann das Maximum ?

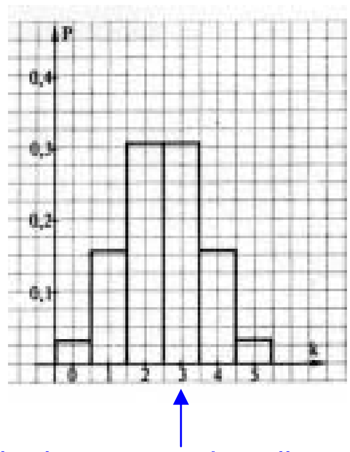
3. Wo liegen die Maxima einer Binomialverteilung ?

Um die Lage des Maximums der Binomialverteilung $f_B(k;n;p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ zu ermitteln, muß man zuerst eine kritische Größe berechnen, es ist die Kennzahl $K_B = p(n+1)$. Nun gibt es zwei Fälle:

1. Fall: Ist $p\cdot(n+1)$ nicht ganzzahlig, dann liegt das Maximum bei der größten ganzen Zahl, die kleiner als $p\cdot(n+1)$ ist.
   Beispiel: Es sei n = 10 und p = 0,3, dann folgt $K_B = 0{,}3\cdot 11 = 3{,}3$
   Die Binomialverteilung hat daher ihr Maximum bei k = 3.
2. Fall: Ist $p\cdot(n+1)$ ganzzahlig, dann liegt bei dieser Zahl ein Maximum und bei der nächst kleineren Zahl nochmals dasselbe Maximum.
   Beispiel: Es sei n = 5 und p = 0,5, dann folgt $K_B = 0{,}5\cdot 6 = 3$
   Die Binomialverteilung hat daher ihr Maximum bei k = 3 und bei k = 2.



Hier gilt K_B = 3,3 also liegt das Maximum bei 3



Hier ist K_B = 3, also gibt es zwei Maxima: Bei k=3 und bei k=2.

Die nun folgende Rechnung ist nur für gehobenere Leistungskursansprüche gedacht. Es wird durch eine raffiniert geführte Berechnung gezeigt, wie man zu dem oben eingerahmten Ergebnis kommt.

BEWEIS:

Auf der Mathematik-CD

4. Angewandte Beispiele zur Binomialverteilung

Beispiel 1:

Eine Maschine ist defekt geworden und produziert mit der Wahrscheinlichkeit p=0,8 defekte Geräte. Der laufenden Produktion werden 20 Geräte entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man darunter

a) genau 3 gute
b) höchstens 1 gutes Gerät
c) genau 15 defekte?
d) Mindestens 17 defekte Geräte

Lösung:

Es liegt eine 20-stufige Bernoullikette vor, da die Wahrscheinlichkeit für defekt mit 0,8 als konstant angenommen werden kann.
X sei die Zufallsvariable "Zahl der guten Geräte" und Y = "Zahl der defekten Geräte".
X und Y sind binomialverteilt.

a) $P(X=3)=\binom{20}{3}\cdot 0{,}2^{3}\cdot 0{,}8^{17}=\frac{20\cdot 19\cdot 8}{3!}\cdot 0{,}2^{3}\cdot 0{,}8^{17}=0{,}2054$

b) $P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}8^{20}+20\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^{19}=0{,}0692$

c) $P(Y=15)=\binom{20}{15}\cdot 0{,}8^{15}\cdot 0{,}2^{5}=0{,}1746$

d) $$\begin{aligned}P(Y\ge 17)&=P(Y=17)+P(Y=18)+P(Y=19)+P(Y=20)\\&=\binom{20}{17}\cdot 0{,}8^{17}\cdot 0{,}2^{3}+\binom{20}{18}\cdot 0{,}8^{18}\cdot 0{,}2^{2}+\binom{20}{19}\cdot 0{,}8^{19}\cdot 0{,}2+0{,}8^{2ß}\\&=0{,}2054+0{,}1369+0{,}0576+0{,}0115=0{,}4114\end{aligned}$$

Bemerkung: Man denke an die Vereinfachungsmöglichkeiten der Binomial-koeffizienten: $\binom{20}{17}=\binom{20}{20-17}=\binom{20}{3}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{6}=1140$ usw.

Beispiel 2:

Eine Maus startet in einem Versuchslabyrinth und muß sich an 8 Abzweigungen zwischen links und rechts entscheiden. Umkehren kann sie nicht.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit läuft sie

a) genau 4 mal rechts
b) genau 5 mal in die gleiche Richtung
c) mindestens 6 mal links

Lösung:

Wir müssen annehmen, daß die Entscheidung links / rechts jedesmal mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 getroffen wird. Dann liegt eine 8-stufige Bernoullikette vor.
X sei die Zufallsvariable "Anzahl der Rechtsabbiegungen" und Y = "Anzahl der Linksabbiegungen". Dann folgt:

a) $P(X=4)=\binom{8}{4}\cdot 0{,}5^{4}\cdot 0{,}5^{4}=\frac{8!}{4!4!}0{,}5^{8}=0{,}2734$

b) 5 mal in die gleiche Richtung heißt 5 mal nach links oder 5 mal nach rechts:

$$P(X=5)+P(Y=5)=2\cdot\binom{8}{5}0{,}5^5 0{,}5^3=2\cdot\binom{8}{3}0{,}5^8=\frac{2\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{3!2^8}=\frac{16\cdot 7}{2^8}=\frac{7}{2^4}=\frac{7}{16}$$

oder 0,4375. Hier wurde etwas gezaubert: $0{,}5^8=\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{2^8}$ und 3! = 6.

Dann kann man kürzen!

c) $$P(Y\geq 6)=P(Y=6)+P(Y=7)+P(Y=8)=\binom{8}{6}\left(\tfrac{1}{2}\right)^8+\binom{8}{7}\left(\tfrac{1}{2}\right)^8+\binom{8}{8}\left(\tfrac{1}{2}\right)^8$$

$$=\left[\binom{8}{2}+\binom{8}{1}+1\right]\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^8=\left[28+8+1\right]\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^8=\frac{37}{256}=0{,}1445$$

Beispiel 3:

In einer Packung Glaskugeln befinden sich stets 20 Kugeln, darunter sind blaue und andersfarbige. Da die blauen sehr beliebt sind, überprüft der Händler deren Anteil. Er stellt fest, daß im Mittel 5 blaue Kugeln pro Packung enthalten sind.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Packung dann 7 blaue Kugeln ?

b) Eine Packung mit 7 blauen Kugeln Inhalt ist eine Edelpackung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man unter 10 Packungen sogar 3 Edelpackungen ?

Lösung:

Das Ziehen aller 20 Kugeln ist eine Bernullikette, denn wir gehen davon aus, daß die Wahrscheinlichkeit für eine blaue Kugel der beobachteten statistischen relativen Häufigkeit entspricht, also $p=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

a) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: "7 blaue Kugeln" ist dann

$$P(A)=\binom{20}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{13}=\frac{20!\cdot 3^{13}}{7!\ 13!\cdot 4^{20}}=0{,}1124$$

b) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: "3 Packungen aus 10 sind Edelpackungen" wird ebenfalls durch die Binomialverteilung berechnet, wobei p_{EP} = 0,1124 ist. Es gilt:

$$P(B)=\binom{10}{3}\cdot 0{,}1124^3\cdot 0{,}8876^7=0{,}0740$$

Hinweis:

Die meisten der hier durchgeführten Berechnung lassen sich aus Tafelwerken ablesen, was die Lösungen deutlich abkürzt.
Dies wird im nächsten Abschnitt erläutert.

5. Arbeiten mit Tabellen zur Binomialverteilung

Die folgende Tabelle ist ein Auszug aus einer Binomialverteilungstabelle, wie sie in diversen Tabellenbüchern zu finden sind:

n	k	0,15	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,35	0,40	0,45	0,50		
12	**0**	1422	1122	0687	0317	0138	0077	00057	0022	0008	0002	**12**	
	1	3012	2692	2062	1267	0712	0462	0368	0174	0075	0029	**11**	
	2	2924	2961	2835	2323	1678	1272	1088	0639	0339	0161	**10**	
	3	1720	1974	2362	2581	2397	2120	1954	1419	0923	0537	**9**	
	4	0683	0888	1329	1936	2311	2384	2367	2128	1700	1208	**8**	
	5	0193	0284	0532	1032	1585	1908	2039	2270	2225	1934	**7**	
	6	0040	0066	0155	0401	0792	1113	1281	1766	2124	2256	**6**	
	7	0006	0011	0033	0115	0291	0477	0591	1009	1489	1934	**5**	
	8	0001	0001	0005	0024	0078	0149	0199	0420	0762	1208	**4**	
	9			0001	0004	0015	0033	0048	0125	0277	0537	**3**	
	10					0002	0005	0008	0025	0068	0161	**2**	
	11							0001	0003	0010	0029	**1**	
	12									0001	0002	**0**	12
		0,85	$\frac{5}{6}$	0,88	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,65	0,60	0,55	0,50		n

Diese Tabelle enthält die Funktion $f_B(k;12;p) = \binom{12}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{12-k}$.

Die Werte stellen nur die ersten vier Dezimalen hinter dem Komma dar.
Leere Felder stellen Zahlen dar, die kleiner als 0,00005 sind, also näherungsweise 0.

Beispiele zum Arbeiten mit dieser Tabelle:

(1) Mit einem idealen Würfel wird 12 mal gewürfelt. ;Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man 5 mal die Zahl „1" ?

Es sei X die Zahl der Einser. X ist binomialverteilt. Dann gilt
$P(X=5) = f_B(5;12;\frac{1}{6}) = 0{,}0284$
(gelbes Feld links).

(2) Der Anteil von Mädchen in einer Jugendgruppe beträgt 60%. Zwölf Kinder werden ausgelost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich darunter 9 Mädchen?

Es sei X die Anzahl der Mädchen. X ist binomialverteilt. Dann gilt
$P(X=9) = f_B(9;12;0{,}6) = 0{,}1419$ (gelbes Feld rechts).

Da jetzt p > 0,5 ist, muß man die grauen Eingänge der Tabelle verwenden, d.h. unten p = 0,6 festlegen und rechts k = 9. Im Kreuzungspunkt liegt das gelbe Feld mit 1419.

(3) Für welches k gilt $f_B(k;12;0{,}85) \approx 0{,}07$?
Man sucht unten im grauen Bereich p = 0,85 und senkrecht darüber eine Zahl dicht bei 0,07 und findet 0,0683. Dazu liest man rechts in der grauen Spalte k = 8 ab. Wie man sieht, kann man also auch Gleichungen lösen.

(3) Mit einem idealen Würfel wird 12 mal gewürfelt. ;Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man höchstens 5 mal die Zahl „1“ ?

Jetzt lautet die Berechnungsformel

$$P(X \le 5) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

Wir hätten aus der letzten Tabelle 6 Zahlen zu addieren. Glücklicherweise gibt es eine neue Funktion, die gerade diese Summen angibt.

Unter der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung versteht man die Funktion, die von X=0 an die folgenden Werte aufsummiert:
$F_B(5;12;p) = f_B(0;12;p) + f_B(1;12;p) + f_B(2;12;p) + f_B(3;12;p) + f_B(4;12;p) + f_B(5;12;p)$

Kurz: $F_B(5;12;\tfrac{1}{6}) = \sum_{i=0}^{5} f_B(i;12;\tfrac{1}{6})$

Allgemein: $F_B(k;n;p) = \sum_{i=0}^{k} f_B(i;n;p)$

Hier die Tabelle der Verteilungsfunktion $F_B(k;12;p) = \sum_{i=0}^{5} f_B(i;12;p)$

n	k	0,15	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,35	0,40	0,45	0,50		
12	**0**	1422	1122	0687	0317	0138	0077	0057	0033	0008	0002	**11**	
	1	4435	3813	2749	1584	0850	0540	0424	0196	0083	00323	**10**	
	2	7358	6774	5583	3907	2528	1811	1513	0834	0421	0193	**9**	
	3	9078	8748	7946	6488	4925	3931	3467	2253	1345	0730	**8**	
	4	9761	9637	9274	8424	7237	6315	5833	4382	3044	1938	**7**	
	5	9954	9921	9806	9456	8822	8223	7873	6652	5269	3872	**6**	
	6	9993	9987	9961	9857	9614	9336	9154	8418	7393	6128	**5**	
	7	9999	9998	9994	9972	9905	9812	9745	9427	8883	8062	**4**	
	8			9999	9996	9983	9961	9944	9847	9644	9270	**3**	
	9					9998	9995	9992	9972	9921	9807	**2**	
	10							9999	9997	9989	9968	**1**	
	11									9999	9998	**0**	
		0,85	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,65	0,60	0,55	0,50		n

Beispiele zur Anwendung:

a) Mit welcher Wahrscheinlicheit erhält man beim Ziehen von 12 Kugeln aus einer Urne **höchstens** 6 weiße, wenn "weiß" mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 in der Urne vorkommt. X sei die Zahl der weißen Kugeln:
$P(X \le 6) = P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=6) = F_B(6;12;0,4) = 0,8418$ (gelb)
Man erkennt, daß die Funktion F_B die Summe der Binomialwerte $f_B(0;12;0,4)$ bis $f_B(6;12;0,4)$ liefert.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man **mindestens** 4 weiße Kugel ? Da die Funktion F_B zur "höchstens-Aufgabe" gehört, muß man diese Aufgabe umformen und das Gegenteil berechnen: Das Gegenteil von **mindestens 4** ist **höchstens 3**. Also sieht die Lösung so aus:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_B(3;12;0,4) = 1 - 0,0834 = 0,9164$$

Problematischer wird die Handhabung der F_B - Tabelle für Wahrscheinlichkeiten über 0,5. In diesem Fall ist der untere graue Eingang zuständig, allerdings gilt dann nicht die abgelesene zahl, sondern "1 - abgelesene Zahl".

Beispiel:

c) $P(X \leq 6) = F_B(6;12;0,75) = 1 - 0,9456 = 0,0544$

Erklärung: Man sucht unten in der grauen Zeile p = 0,75, dann in der rechten grauen Spalte n=12 und k = 6. Dies führt zu einem (hier) blau unterlegten Feld mit der Zahl 9456. Diese wird dann so verarbeitet, wie gezeigt.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht man bei 12-maligem Werfen eines idealen Würfels höchstens 8 mal keine 6 ?

$$P(X \leq 8) = F_B(8;12;\tfrac{5}{6}) = 1 - 0,8748 = 0,1252$$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht man bei 12-maligem Werfen eines idealen Würfels mindestens 10 mal keine 6 ?

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - F_B(9;12;\tfrac{5}{6}) = 1 - [1 - 0,6774] = 1 - 1 + 0,6774 = 0,6774$$

Erklärung: Zuerst muß die mindestens-Aufgabe über das Gegenereignis zu einer höchstens-Aufgabe werden. Dann sucht man unten in der grauen Zeile $p = \frac{5}{6}$*, dann in der rechten grauen Spalte k=9. Durch das Gegenereignis ensteht das erste Mal "1 - ", durch die Verwendung des grauen Eingangs das zweite Mal "1 -". Und beides hebt sich am Ende auf. Man könnte also sagen: Für Werte über p = 0,5 stellt die Tabelle die Ergebnisse von "Mindestens-Aufgaben" dar*

(e) Bleiben wir beim 12-maligen Würfeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man zwischen 3 und 7 Einser ?
Das Ereignis "Man würfelt zwischen 3 und 7 Einser" kann man auch so formulieren: "Man würfeln 4 bis 6 Einser" und mit der Zufallsvariablen X = Zahl der Einser sieht es so aus: P (3 < X < 7) = $P(4 \leq X \leq 6)$.
Die Ergebnismenge für X und n=12 sieht so aus:

{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 } (1)

Das zu berechnende Ereignis umfaßt die Menge { 4 ; 5 ; 6 }.
Dies bekommt man rechnerisch so in den Griff:
Durch $P(X \leq 6)$ erfaßt man die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Anzahlen { 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 } .
Durch $P(X \leq 3)$ erfaßt man die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Anzahlen { 0 ; 1 ; 2 ; 3 }.
Subtrahiert man beide Wahrscheinlichkeiten, dann erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = F_B\left(6;12;\tfrac{1}{6}\right) - F_B\left(3;12;\tfrac{1}{6}\right) = 0,9987 - 0,8748 = 0,1239$$

Dies ist in der Zeile (1) noch graphisch angedeutet worden.

(f) In einer Klasse haben 70% der Kinder die Blutgruppe 0. Es werden 12 ausgelost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich darunter 7 bis 9 Kinder mit dieser Blutgruppe ?
Hier liegt wieder eine Binomialverteilung für die Variable X = Zahl der Kinder mit Blutgruppe 0 vor.
$P(7 \le X \le 9) = P(X \le 9) - P(X \le 6) = F_B(9;12;0,7) - F_B(6;12;0,7)$
Jetzt liegt eine Wahrscheinlichkeit von 0,7 vor. Da diese größer als 0,5 ist, muß der graue Eingang verwendet werden und außerdem ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit „1 – abgelesene Zahl“ .
$P(7 \le X \le 9) = (1 - 0,2528) - (1 - 0,8822) = 1 - 0,2528 - 1 + 0,8822$
= 0,8822 – 0,2528 = 0,6294

Aufgaben:

(g) Lies aus den beiden Tafeln ab:
$f_B(3;12;0,5)$, $f_B(2;12;0,15)$, $f_B(4;12;0,65)$ und $f_B(4;12;0,8)$
$F_B(2;12;0,15)$, $F_B(8;12;\frac{1}{3})$, $F_B(9;12;0,65)$ und $F_B(5;12;\frac{2}{3})$

(h) Es sei n = 12 und p = 0,45 .
Berechne $P(X \le 6)$, $P(X < 9)$, $P(X \ge 3)$, $P(X > 9)$,
sowie $P(1 \le X \le 6)$, $P(3 \le X \le 8)$.

(i) Es sei n = 12 und p = 0,75.
Berechne $P(X \le 5)$, $P(X < 11)$, $P(X \ge 7)$, $P(X > 9)$,
sowie $P(5 \le X \le 9)$, $P(3 < X < 7)$.

(k) Es sei n = 100 und p = 0,45.
Berechne $P(X = 55)$, $P(30 < X \le 40)$ und $P(35 \le X < 51)$

(l) Es sei n = 100 und p = 0,8
Berechne $P(X = 82)$.

Lösungen auf der Mathematik-CD

Hinweis

Die Bücher mit mathematischen Tabellen enthalten natürlich immer eine Auswahl an Tafeln. So gibt es in einem Buch z.B. keine Tafel der Funktion $f_B(k;100;p)$, wohl aber eine zu $F_B(k;100;p)$. Dies kann durch einen Trick auch für die Funktion f_B verwendet werden.

Beispiel:
Gesucht ist $f_B(20;100;0,4)$. Dann rechnet man so:
$f_B(20;100;0,4) = F_B(20;100;0,4) - F_B(19;100;0,4) = 0,5610 - 0,4465 = 0,1245$

6. Die Dreimal-Mindestens-Aufgabe der Binomialverteilung

Aufgabe 1: In einem Lostopf ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn 0,4. Wie oft muß man mindestens ziehen, um mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit mindestens einen Gewinn zu bekommen ?

Aufgabe 2: Ein Zahlenrad enthält 10 Felder mit den Aufschriften 0 bis 9. Wie oft muß man das Rad mindestens drehen, um mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens einmal das Feld mit der Zahl 0 zu bekommen ?

Aufgabe 3: In einem Lostopf ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn 0,4. Wie oft muß man mindestens ziehen, um mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit mindestens vier Gewinne zu bekommen ?

Aufgabe 4:

Eine Lieferung Kondensatoren trägt die Aufschrift: Verbilligte Lieferung, da mit 10% Wahrscheinlichkeit ein Transistor defekt sein kann. Händler Lehmann testet die Lieferung und mißt bei vielen Kondensatoren die Kapazität, um festzustellen, ob sie brauchbar sind. Um eine Entscheidung treffen zu können, will er von uns wissen, wie oft er mindestens testen muß, um mit 75% Wahrscheinlichkeit mindestens 5 defekte Kondensatoren zu finden.

Aufgabe 5:

Zwei Drittel einer Jugendgruppe wohnt in der Stadt. Es werden zufällig Jugendliche ausgewählt. Wie viele muß man mindestens auswählen, um mit mindestens 96 % Wahrscheinlichkeit mindestens 9 Stadtkinder zu bekommen ?

Lösungen auf der Mathematik-CD