

STOCHASTIK

ABITURTRAINING

Abituraufgabe

Grundkurs 1987 – C - 1 – HT
Baden-Württemberg

Beschreibung und Wertung:

Verschiedene Urnenexperimente
Standardübungen, geringes Niveau aber gute Übungsmöglichkeit.
In Teil d) sehr interessante Spiel-Erwartungswert-Aufgabe !

Datei Nr. 39101

Friedrich W. Buckel

Februar 2002

Internatsgymnasium Schloss Torgelow

AUFGABE

In einer Urne U befinden sich 4 weiße und 6 schwarze Kugeln.

- a) Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

A: Alle Kugeln sind schwarz

B: Genau 2 der Kugeln sind weiß.

In einem neuen Experiment werden alle 10 Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man zuerst alle Kugeln der einen Farbe und dann die Kugeln der anderen Farbe ?

- b) Nun werden 10 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

C: Man zieht genau 5 weiße Kugeln

D: Man zieht mindestens 7 schwarze Kugeln.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Ereignis D bei viermaliger Durchführung der 10 Ziehungen genau zweimal ein ?

- c) Nun sollen mit einem Griff 3 Kugeln gezogen werden.
 X sei die Zufallsvariable für die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .
Berechne Erwartungswert und Varianz von X .

- d) Bei dem folgenden Glücksspiel verlangt der Veranstalter einen Einsatz von 2 €. Aus der Urne U darf man dann eine Kugel ziehen. Ist diese weiß, erhält der Spieler 4 € ausbezahlt.

Welchen Gewinn erzielt der Veranstalter pro Spiel auf lange Sicht ?

Das Glücksspiel soll wie folgt abgeändert werden:

Vor der Ziehung werden der Urne U mit den 10 Kugeln n weiße Kugeln hinzugefügt. Der Spieler muß aber für jede hinzugefügte Kugel zusätzlich 1 € pro Spiel einsetzen. Zieht der Spieler dann eine weiße Kugel, werden 10 € an ihn ausbezahlt.

Für welches n ist für den Veranstalter die Gewinnerwartung positiv ?

LÖSUNG

a) Experiment: Ziehen von 3 Kugeln ohne Zurücklegen.

X sei die Zufallsvariable „Zahl der weißen Kugeln“.
Sie ist hypergeometrisch verteilt.

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B.

1. Lösung: Mit der hypergeometrischen Verteilung:

$$P(A) = P(X=0) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3!}{3! \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = P(X=2) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3!}{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{3}{10}$$

2. Lösung mit Pfadbetrachtungen:

$$(4w|6s) \xrightarrow{\frac{6}{10}} s(4w|5s) \xrightarrow{\frac{5}{9}} s(4w|4s) \xrightarrow{\frac{1}{2}} s$$

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Zu B gibt es 3 Pfade:

$$(4w|6s) \xrightarrow{\frac{6}{10}} s(4w|5s) \xrightarrow{\frac{4}{9}} w(3w|5s) \xrightarrow{\frac{3}{8}} w$$

$$(4w|6s) \xrightarrow{\frac{4}{10}} w(3w|6s) \xrightarrow{\frac{3}{9}} w(2w|6s) \xrightarrow{\frac{6}{8}} s$$

$$(4w|6s) \xrightarrow{\frac{4}{10}} w(3w|6s) \xrightarrow{\frac{6}{9}} s(3w|5s) \xrightarrow{\frac{3}{8}} w$$

$$P(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = 3 \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{3}{10}$$

nachinigem Kürzen.

Daß die drei Pfade gleichwahrscheinlich sind, folgt aus dieser Überlegung: Wir ziehen stets 1 schwarze aus 6 schwarzen und 2 weiße aus 4 und dann 3 weißen. Insgesamt sind es 10, dann 9, dann 8 Kugeln ...

Experiment: Ziehen aller 10 Kugeln ohne Zurücklegen.

Das Ereignis „Man zieht zuerst alle schwarzen und dann alle weißen bzw. umgekehrt“ besteht aus zwei Pfaden:

1. Pfad:

$$(4|6) \xrightarrow{\frac{6}{10}} s(4|5) \xrightarrow{\frac{5}{9}} s.. \xrightarrow{\frac{1}{5}} s(4|0) \xrightarrow{1} w(3|0) \xrightarrow{1} w(2|0) \xrightarrow{1} w(1|0) \xrightarrow{1} w$$

mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = \underbrace{\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}}_{6 \text{ mal schwarz}} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}_{4 \text{ mal weiß}} = \frac{1}{210}$

2. Pfad:

$$(4|6) \xrightarrow{\frac{4}{10}} w(3|6) \xrightarrow{\frac{3}{9}} w.. \xrightarrow{\frac{1}{7}} w(0|6) \xrightarrow{1} s(0|5) \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{1} s(0|0)$$

mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = \underbrace{\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}}_{4 \text{ mal schwarz}} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}_{6 \text{ mal weiß}} = \frac{1}{210}$

Gesamtwahrscheinlichkeit: $P = 2 \cdot \frac{1}{210} = \frac{1}{105} \approx 0,0095$.

b) Experiment: Ziehen aller 10 Kugeln ohne Zurücklegen.

X = Zahl der schwarzen Kugeln. X ist binomialverteilt mit $p = 0,6$.

C: Man zieht genau 5 weiße Kugeln:

$$P(C) = P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot 0,24^5 \approx 0,2007$$

D: Man zieht mindestens 7 schwarze Kugeln:

$$P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \approx 0,3823$$

wobei man die 4 Werte der Tafel der Binomialverteilung entnehmen kann.

Oder mit Hilfe der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung :

$$P(D) = P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) \approx 1 - (1 - 0,3823) = 0,3823$$

Man muß „1 – abgelesener Wert“ rechnen, weil $p > 0,5$ ist !

Hier wurde mit dem Gegenereignis gearbeitet: Mindestens 7 wird dann zu höchstens 6 usw.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Ereignis D bei viermaliger Durchführung der 10 Ziehungen genau zweimal ein ?

Es sei Y die Zahl des Eintretens von D. Y ist binomialverteilt mit $p = 0,3823$:

$$P(Y = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0,3823^2 \cdot (1 - 0,3823)^2 \approx 0,3346.$$

c) Nun sollen mit einem Griff 3 Kugeln gezogen werden. X sei die Zufallsvariable für die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .

Die Wahrscheinlichkeit von X wird mit der Hypergeometrischen Verteilung berechnet.

$$P(X = x) = \frac{\binom{6}{x} \cdot \binom{4}{3-x}}{\binom{10}{3}} \quad \text{mit} \quad \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{4}{3}}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}}{120} = \frac{6 \cdot 6}{120} = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1}}{120} = \frac{15 \cdot 3}{120} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{0}}{120} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3! \cdot 120} = \frac{1}{6}$$

Die erste und letzte „Wahrscheinlichkeit kann auch an Hand eines Pfades berechnet werden:

$$(4w|6s) \xrightarrow{\frac{4}{10}} w(3|6) \xrightarrow{\frac{3}{9}} w(2|6) \xrightarrow{\frac{2}{8}} w$$

$$P(X = 0) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

Erwartungswert von X :

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{30} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1,8$$

Varianz von X :

$$V(X) = (1,8 - 0)^2 \cdot \frac{1}{30} + (1,8 - 1)^2 \cdot \frac{3}{10} + (1,8 - 2)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1,8 - 3)^2 \cdot \frac{1}{6} = \dots = 0,56$$

Merke:

Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung von Erwartungswert. Also wird sie so berechnet, daß man die Abweichungen quadriert und mit den Wahrscheinlichkeiten multipliziert, damit man den Mittelwert erhält.

d) Bei dem folgenden Glücksspiel verlangt der Veranstalter einen Einsatz von 2 €. Aus der Urne U darf man dann eine Kugel ziehen. Ist diese weiß, erhält der Spieler 4 € ausbezahlt.

Gewinntabelle:

Ereignis	Wahrscheinlichkeit	Auszahlung	Reingewinn des Veranstalters
„weiß“	0,4	4	-2
„schwarz“	0,6	0	2

Erwartungswert für den Reingewinn des Veranstalters:

$$E(\text{RG}) = 0,4 \cdot (-2) + 0,6 \cdot 2 = -0,8 + 1,2 = 0,4 \text{ (€)}.$$

Neues Spiel:

Vor der Ziehung werden der Urne U mit den 10 Kugeln n weiße Kugeln hinzugefügt. Der Spieler muß aber für jede hinzugefügte Kugel zusätzlich 1 € pro Spiel einsetzen. Zieht der Spieler dann eine weiße Kugel, werden 10 € an ihn ausbezahlt.

Für welches n ist für den Veranstalter die Gewinnerwartung positiv ?

Einsatz: $(2+n)$ €

Ereignis	Wahrscheinlichkeit	Auszahlung	Reingewinn des Veranstalters
„weiß“	$\frac{4+n}{10+n}$	10	$2+n-10$
„schwarz“	$\frac{6}{10+n}$	0	$2+n$

Erwartungswert für den Reingewinn des Veranstalters:

$$E(\text{RG}) = \frac{4+n}{10+n} (2+n-10) + \frac{6}{10+n} \cdot (2+n) = \frac{(4+n)(n-8) + 6(2+n)}{n+10}$$

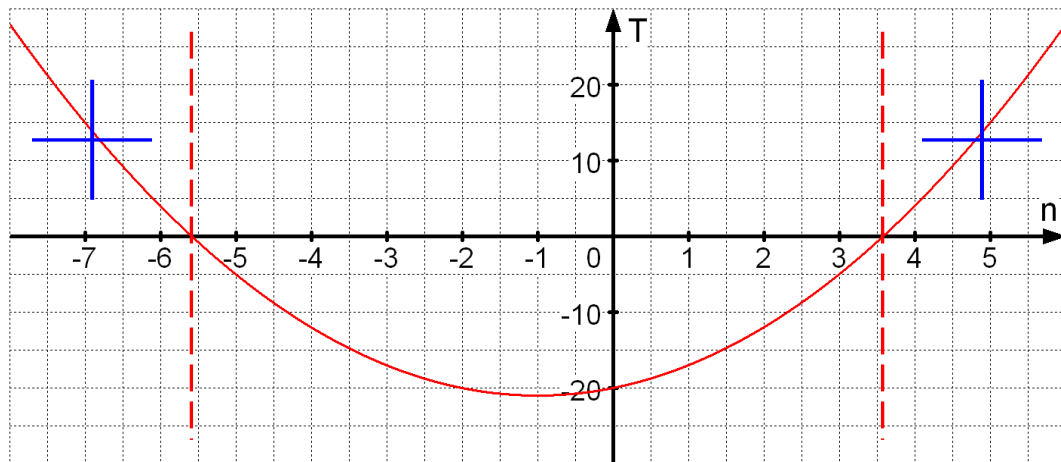
$$E(\text{RG}) = \frac{4n - 32 + n^2 - 8n + 12 + 6n}{n+10} = \frac{n^2 + 2n - 20}{n+10}$$

Eine positive Gewinnerwartung tritt dann ein, wenn der Zähler positiv ist, d.h. wenn

$$n^2 + 2n - 20 > 0 \text{ ist.}$$

Ich wende die graphische Lösungsmethode an.

Der Term $T = n^2 + 2n - 20$ stellt eine Parabel dar, die nach oben geöffnet ist. Also haben wir zwischen den Nullstellen negative T-Werte, und außerhalb des Nullstellenintervalles positive T-Werte:



Berechnung der Nullstellen:

$$n^2 + 2n - 20 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 80}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{84}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{21}}{2} = -1 \pm \sqrt{21}$$

Der Term T hat somit **positive** Werte für $n < -1 - \sqrt{21} \approx -5,58$, d.h. für $n \in \{-6; -7; \dots\}$ und **positive** Werte für $n > -1 + \sqrt{21} \approx 3,58$, d.h. für $n \geq 4$.

Wenn man beachtet, daß n eine Anzahl angibt, kann n nie negativ werden also scheidet die erste Möglichkeit ganz aus und wir haben als Ergebnis:

Für $n \geq 4$ wird das Spiel für den Veranstalter günstig.