STOCHASTIK

ABITURTRAINING

Abitursaufgabe

Grundkurs 1987 – C - 2 – HT
Baden-Württemberg

Beschreibung und Wertung:
Viele Übungen zur Binomialverteilung
Interessante Wahrscheinlichkeiten bei einem Wurfspiel mit 2 Personen.
Eine Solange-Bis-Aufgabe mit 4 Runden und Erwartungswert
Sehr gute Aufgabe, GK-Niveau oberes Drittel

Datei Nr. 39102

Friedrich W. Buckel

Februar 2002

Internatsgymnasium Schloss Torgelow

AUFGABE

Rainer und Sigrid werfen auf ein Ziel. Sie treffen erfahrungsgemäß mit den Wahrscheinlichkeiten $p_R = \frac{3}{8}$ und $p_S = \frac{9}{10}$.

a) Rainer wirft 5 mal. X sei die Zufallsvariable für die Anzahl der dabei erzielten Treffer.

Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.

Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
A: Rainer trifft höchstens 2 mal
B: Rainer trifft mindestens 1 mal
C: Rainer trifft erstmals beim letzten Wurf
D: Bei Rainer wechseln Treffer und Fehlwürfe ab.

b) Sigrid wirft 5 Serien mit jeweils 10 Würfen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält jede Serie mindestens einen Fehlwurf ?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sigrid insgesamt höchstens 45 mal trifft ?
Berechne die Treffererwartung M bei 50 Würfen.
Gib ein zu M symmetrisches Intervall an, in dem die Trefferzahl X mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% liegt.

c) Rainer und Sigrid werfen je 2 mal. Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: Beide erreichen zusammen mindestens 3 Treffer.

d) Rainer und Sigrid tragen einen Wettbewerb in mehreren Runden aus.
In jeder Runde beginnt Rainer. Sie werfen abwechselnd so lange, bis ein Treffer erzielt wird, jeder wirft jedoch höchstens 2 mal. Wer trifft hat die Runde gewonnen; wird das Ziel nicht getroffen, endet die Runde unentschieden.

Y sei die Zufallsvariable für die Anzahl der Würfe in einer Runde.
Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y.

Berechne die mittlere Zahl der Würfe je Runde, wenn viele Runden gespielt werden.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Rainer eine Runde ?

LÖSUNG

Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten $p_R = \frac{3}{8}$ und $p_S = \frac{9}{10}$.

a) Rainer wirft 5 mal. X sei die Zufallsvariable für die Anzahl der dabei erzielten Treffer. Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.

Es liegt eine Binomialverteilung vor:

$$P(X=0) = \left(\tfrac{5}{8}\right)^5 = 0{,}0954$$

$$P(X=1) = \binom{5}{1}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^4 = 5\cdot\frac{3\cdot 5^4}{8^5} = 0{,}2861$$

$$P(X=2) = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^3 = 10\cdot\frac{3^2\cdot 5^3}{8^5} = 0{,}3433$$

$$P(X=3) = \binom{5}{3}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2 = 10\cdot\frac{3^3\cdot 5^2}{8^5} = 0{,}2060$$

$$P(X=4) = \binom{5}{4}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^1 = 5\cdot\frac{3^4\cdot 5}{8^5} = 0{,}0618$$

$$P(X=5) = \left(\tfrac{3}{8}\right)^5 = 0{,}0074$$

Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

A: Rainer trifft höchstens 2 mal

B: Rainer trifft mindestens 1 mal

C: Rainer trifft erstmals beim letzten Wurf

D: Bei Rainer wechseln Treffer und Fehlwürfe ab.

$$P(A) = P(X \le 2) = 0{,}0954 - 0{,}2861 + 0{,}3433 = 0{,}7248$$

$$P(B) = P(X \ge 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}0954 = 0{,}9046$$

$$P(C) = P(\{NNNNT\}) = \left(\tfrac{5}{8}\right)^4 \tfrac{3}{8} = 0{,}0572$$

$$P(D) = P(\{TNTNT\} \cup \{NTNTN\}) = \left(\tfrac{3}{8}\right)^3\cdot\left(\tfrac{5}{8}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{8}\right)^2\cdot\left(\tfrac{5}{8}\right)^3 = \tfrac{27\cdot 25 + 9\cdot 125}{5^5} = 0{,}0549$$

b) Sigrid wirft 5 Serien mit jeweils 10 Würfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält jede Serie mindestens einen Fehlwurf ?

Z sei das Ereignis: Mindestens 1 Fehlwurf unter 10 Würfen:

$$P(Z) = 1 - P(\overline{Z}) = 1 - 0{,}9^{10} = 1 - 0{,}3487 = 0{,}6513$$

Wobei $\overline{Z}$ das Gegenereignis „10 Treffer“ darstellt.

F sei nun das Ereignis „Jede Serie enthält mindestens einen Fehlwurf“:

$$\xrightarrow[p]{} Z \xrightarrow[p]{} Z \xrightarrow[p]{} Z \xrightarrow[p]{} Z \xrightarrow[p]{} Z$$

$$P(F) = p^5 = 0{,}6513^5 = 0{,}1172$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Sigrid insgesamt höchstens 45 mal trifft ?

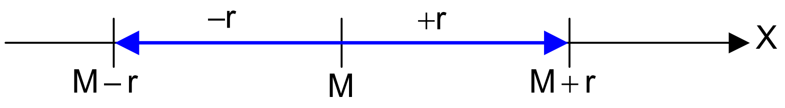
Sigrid führt bei ihren 5 Serien 50 Würfe aus.
X sei die Anzahl der Treffer bei 50 Würfen von Sigrid.
X ist binomialverteilt mit n=50 und p = 0,9.
Damit folgt

$$P(X \le 45) = F_B(45;50;0,9) = 1 - 0,4312 = 0,5688$$

Berechne die Treffererwartung M bei 50 Würfen.

$$M = E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0,9 = 45$$

Gib ein zu M symmetrisches Intervall an, in dem die Trefferzahl X mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% liegt.



$$S = \left\{ 0;1;....;42 \,\middle|\, \underbrace{43;44;45;46;47} \,\middle|\, 48;49;50 \right\}$$

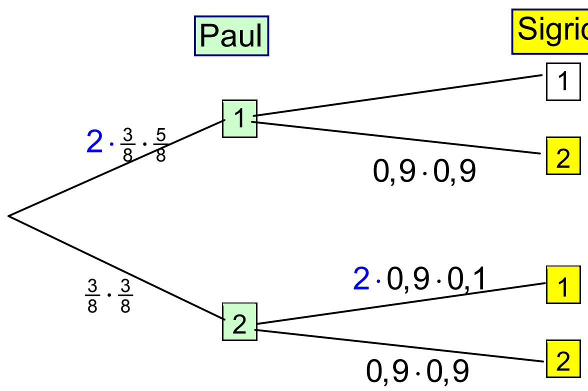
Für M = 45 und r = 2 gilt $P(43 \le X \le 47) = P(X \le 47) - P(X \le 42)$
Man muß also beim linken Rand immer 1 subtrahieren !

$$P(43 \le X \le 47) = P(X \le 47) - P(X \le 42) = F_B(47;50;0,9) - F_B(42;50;0,9) =$$
$$= 1 - 0,1117 - (1 - 0,8879) = -0,1117 + 0,8879 = 0,7762$$

$$P(42 \le X \le 48) = P(X \le 48) - P(X \le 41) = F_B(48;50;0,9) - F_B(41;50;0,9) =$$
$$= 1 - 0,0038 - (1 - 0,9421) = -0,0038 + 0,9421 = 0,9083$$

ERGEBNIS: Im Intervall $\{42;43;...;48\}$ liegen mehr als 90 % aller Werte.

c) Rainer und Sigrid werfen je 2 mal. Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: Beide erreichen zusammen mindestens 3 Treffer.

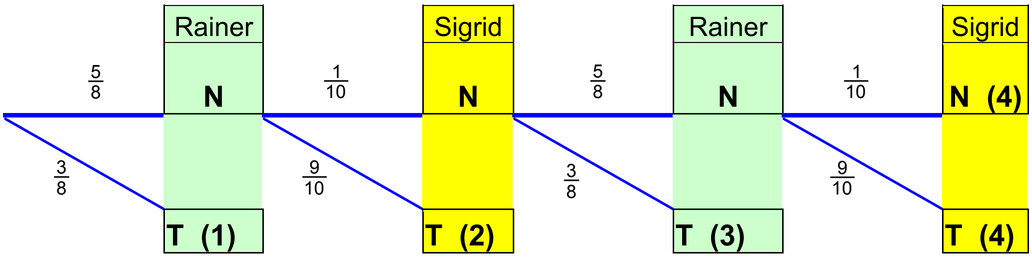


Wenn Paul bei 2 Würfen nur 1 Treffer macht, dann ist dies auf 2 Arten möglich: TN bzw. NT (N=Niete). Daher trägt die Wahrscheinlichkeit für 1 Treffer bei Paul den Faktor 2.
Dasselbe gilt für 1 Treffer bei Sigrid.

$$P(E) = 2 \cdot \tfrac{15}{64} \cdot 0,81 + \tfrac{9}{64} \cdot (2 \cdot 0,09 + 0,9^2)$$
$$P(E) \approx 0,5189 \approx 52\% .$$

d) Rainer und Sigrid tragen einen Wettbewerb in mehreren Runden aus. In jeder Runde beginnt Rainer. Sie werfen abwechselnd so lange, bis ein Treffer erzielt wird, jeder wirft jedoch höchstens 2 mal. Wer trifft hat die Runde gewonnen; wird das Ziel nicht getroffen, endet die Runde unentschieden.

Der Spielverlauf wird in diesem Baumdiagramm dargestellt. Die Zahl in Klammern gibt die Zahl der Würfe an.



Y sei die Zufallsvariable für die Anzahl der Würfe in einer Runde. Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y.

Y	$P(Y = y_i)$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{5}{8} \cdot \frac{9}{10} = \frac{45}{80}$
3	$\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{640}$
4	$\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right) = \frac{25}{640}$

Berechne die mittlere Zahl der Würfe je Runde, wenn viele Runden gespielt werden.

Erwartungswert: $E(Y) = 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{45}{80} + 3 \cdot \frac{15}{640} + 4 \cdot \frac{25}{640} = \frac{3 \cdot 80}{640} + \frac{90 \cdot 8}{640} + \frac{45+100}{640} = \frac{1105}{640} \approx 1{,}73$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Rainer eine Runde ?

R sei das Ereignis: Rainer gewinnt die Runde:

$P(R) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{102}{256} \approx 0{,}40$