STOCHASTIK
ABITURTRAINING

Abitursaufgabe

Leistungskurs 1998 – 2 / 1 – HT-BG
Baden-Württemberg

(Aufgabenstellung leicht verändert)

Beschreibung
Viele bedingte Wahrscheinlichkeiten,
Unabhängige Ereignisse
Signifikanztest.

Wertung
Als Abitursaufgabe etwas einseitig, doch mit hervorragendem Übungsmaterial
(Wertung für den Inhalt 1, als Abitursaufgabe 2,5)
Schwierigkeitsniveau: hoch.

Datei Nr. 39201

Friedrich W. Buckel
April 2002

Internatsgymnasium Schloss Torgelow

AUFGABE

Im Winter 1995/96 herrscht in Deutschland eine Grippeepidemie. Folgende (gerundete) Zahlen geben Auskunft über das Ausmaß der Epidemie:

Von den 80 Millionen in Deutschland lebenden Personen erkranken 12,5 %.
Von den 9,6 Millionen in Baden-Württemberg lebenden Personen erkranken 10 %.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine in Deutschland lebende Person in Baden-Württemberg wohnt und im Winter 1995/96 nicht an Grippe erkrankt ist ?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine im Winter 1995/96 nicht in Baden-Württemberg wohnende Person an Grippe erkrankt ?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wohnt eine im Winter 1995/96 an Grippe erkrankte Person in Baden-Württemberg?

b) Eine im Winter 1995/96 in Deutschland lebende Person wird zufällig ausgewählt. Untersuche, ob die folgenden Ereignisse B und K stochastisch unabhängig sind.

B: Die ausgewählte Person wohnt in Baden-Württemberg.
G: Die ausgewählte Person ist an Grippe erkrankt.

c) In Baden-Württemberg werden im Winter 1995/96 Schulen geschlossen, wenn mehr als 15 % ihrer Schüler erkrankt sind. Eine in Baden-Württemberg zufällig ausgewählte Schule hat 100 Schüler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird diese Schule geschlossen ?

d) Vor der Epidemie haben in Baden-Württemberg Grippe-Schutzimpfungen stattgefunden. 5% der geimpften Personen erkrankten dennoch an Grippe.
Die Wahrscheinlichkeit, daß eine nicht geimpfte Person an Grippe erkrankt, ist 21 %.

Wie viele Bewohner Baden-Württembergs haben sich demnach impfen lassen ?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine in Baden-Württemberg an Grippe erkrankte Person geimpft worden ist ?

e) Ein Apotheker behauptet:

„Bei mindestens 90% der geimpften Personen bricht die Krankheit nicht aus.“

Ein Arzt findet bei 100 zufällig ausgewählten geimpften Personen 15 Grippekranke. Kann die Behauptung des Apothekers mit einer Irrtums-Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % zurückgewiesen werden ?

LÖSUNG

Die Aufgabe beschäftigt sich mit verschiedenen Fakten, die wir als Ereignisse festlegen müssen:

D: Eine Person wohnt in **D**eutschland
B: Eine Person wohnt in **B**aden-Württemberg
G: Eine Person ist an **G**rippe erkrankt.

Als nächstes muß man die gegebenen Zahlen statistisch auswerten und in einem Carnaugh-Diagramm (lies *„Karnaff-Diagramm“*) anordnen:

Einwohner 1995/96 in Deutschland: 80 Millionen
Einwohner 1995/96 in Baden-Württemberg: 9,6 Millionen
Von den 80 Mill. in Deutschland lebenden Personen erkranken 12,5 %, d.h.
$P(D \cap G) = 0{,}125$
Von den 9,6 Mill. in Baden-Württemberg lebenden Personen erkranken 10 %:
$P(B \cap G) = 0{,}10$.

Carnaugh-Diagramm:

	B	$\overline{B}$	Summen für D
G	10% von 9,6 Mill. also **0,96 Mill.** $\boxed{1}$	**9,04 Mill**ionen $\boxed{2}$	12,5% von 80 Mill. also **10 Mill.** $\boxed{3}$
$\overline{G}$	**8,64 Mill**ionen $\boxed{4}$	**61,36 Mill**ionen $\boxed{5}$	**70 Mill**ionen $\boxed{6}$
Summen	**9,6 Mill**ionen $\boxed{7}$	**70,4 Mill**ionen $\boxed{8}$	**80 Mill**ionen $\boxed{9}$

<u>Anleitung:</u> *Zuerst trägt man die gegebenen Zahlen der an Grippe erkrankten in die Felder* $\boxed{3}$ *und* $\boxed{1}$ *ein (grün). Da* $\boxed{3}$ *die Summe der Felder* $\boxed{1}$ *und* $\boxed{2}$ *ist, folgt sofort durch Subtraktion 10 Mill. – 0,96 Mill. der Wert 9,04 der Grippekranken außerhalb von Baden-Württemberg in Feld* $\boxed{2}$.

Nun kennt man auch schnell die Zahl der in Baden-Württemberg nicht erkrankten Personen. Dazu trägt man in $\boxed{7}$ *die 9,6 Mill. Personen von Baden-Württemberg ein (grün) und in* $\boxed{4}$ *die Differenz 9,6 Mill. – 0,96 Mill. = 8,64 Mill.*

Wir wissen, daß in Deutschland 80 Millionen Personen lebten, diese Zahl trägt man in $\boxed{9}$ *(blau) ein. Von diesen waren 10 Mill. erkrankt, also können wir den Rest, also 70 Mill. nicht erkrankter Personen in Feld* $\boxed{6}$ *eintragen (weiß). Und genauso füllen wir das Feld* $\boxed{8}$ *mit den 80 Mill. – 9,6 Mill. = 70,4 Mill. nicht in Baden-Württemberg lebenden Personen (weiß).*

Nun bleibt $\boxed{5}$ *als letztes Feld übrig. Dieses Feld gibt die Schnittmenge* $\overline{B} \cap \overline{G}$ *an , also die Personen, die nicht an Grippe erkrankt waren* ***und*** *nicht in Baden-Württemberg wohnen. Man erhält diese Zahl entweder als Differenz der Felder* $\boxed{8}$ *und* $\boxed{6}$ *zu 61,36 Mill. oder (zur Kontrolle ganz wichtig) als Differenz der Felder* $\boxed{8}$ *und* $\boxed{2}$ *natürlich ebenfalls zu 61,36 Millionen.*

Jetzt erst beginnen wir mit der eigentlichen Aufgabe!

a) Berechnung dreier Wahrscheinlichkeiten:

(1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine in Deutschland lebende Person in Baden-Württemberg wohnt und im Winter 1995/96 nicht an Grippe erkrankt ist ?

Hier geht es um eine Person aus dem Feld $\boxed{7}$, also um die Schnittmenge $B \cap \overline{G}$, gesucht ist also $P(B \cap \overline{G})$.

Diese Wahrscheinlichkeit berechnen wir noch mit der Grundregel $P = \frac{g}{m}$.

Also so: $P(B \cap \overline{G}) = \frac{|B \cap \overline{G}|}{|D|} = \frac{8{,}64 \text{ Mill.}}{80 \text{ Mill.}} = 0{,}108 = 10{,}8$

(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine im Winter 1995/96 nicht in Baden-Württemberg wohnende Person an Grippe erkrankt ?

Jetzt ist die Bedingung vorgegeben, daß die Person nicht in Baden-Württemberg wohnt. Also liegt eine bedingte Wahrscheinlichkeit vor: $P_{\overline{B}}(G)$ = ?.

EXKURS über BEDINGTE Wahrscheinlichkeiten.

Das Ereignis $\overline{B} \cap G$, kann man sich als Folge zweier Ereignisse vorstellen: Zuerst $\overline{B}$ und dann G - oder in umgekehrter Reihenfolge: Zuerst G , dann $\overline{B}$.

Der ersten Möglichkeit entspricht dieser Pfad:

$$\xrightarrow{\boxed{P(\overline{B})}} \overline{B} \xrightarrow{\boxed{P_{\overline{B}}(G)}} G \qquad \text{Gesamtereignis: } \overline{B} \cap G$$

Zu diesem Pfad gehört diese Wahrscheinlichkeits-Berechnung:

$$P(\overline{B} \cap G) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(G) \Rightarrow P_{\overline{B}}(G) = \frac{P(\overline{B} \cap G)}{P(\overline{B})} \qquad (1)$$

Nun brauchen wir als Nebenrechnung diese beiden Werte:

$$P(\overline{B} \cap G) = \frac{g}{m} = \frac{|\overline{B} \cap G|}{|D|} = \frac{\text{Feld } \boxed{2}}{\text{Feld } \boxed{9}} = \frac{9{,}04}{80} = 0{,}113 \qquad (2)$$

$$P(\overline{B}) = \frac{g}{m} = \frac{|\overline{B}|}{|D|} = \frac{\text{Feld } \boxed{8}}{\text{Feld } \boxed{9}} = \frac{70{,}4}{80} = 0{,}88 \qquad (3)$$

> $|D|$ bezeichnet die Zahl der Personen in der Menge D usw.

Damit folgt nun $P_{\overline{B}}(G) = \frac{P(\overline{B} \cap G)}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}113}{0{,}88} = 0{,}1284$

Schaut man sich diese Rechnung genauer an, erkennt man <u>einen abkürzenden Weg</u>. Die beiden Formeln (2) und (3) enthalten im Nenner jeweils $|D|$. Rechnet man nicht mit Zahlen, sondern setzt (2) und (3) in (1) ein, so folgt:

$$P_{\overline{B}}(G) = \frac{P(\overline{B} \cap G)}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{|\overline{B} \cap G|}{|D|}}{\frac{|\overline{B}|}{|D|}} = \frac{|\overline{B} \cap G|}{|\overline{B}|}$$

und dies liefert $P_{\overline{B}}(G) = \frac{9{,}04}{70{,}4} \approx 0{,}1284$.

(3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wohnt eine im Winter 1995/96 an Grippe erkrankte Person in Baden-Württemberg?

Vorgegebene Bedingung: Die Person ist an Gruppe erkrankt, also G.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wohnt diese Person in Baden-Württemberg : $P_G(B)$?

Wir zeichnen wieder den zugehörigen Pfad: $\xrightarrow{\boxed{P(G)}} G \xrightarrow{\boxed{P_G(B)}} B$

Der ganze Pfad stellt die Schnittmenge $G \cap B$ dar und wir erhalten die Berechnung:

$$P(G \cap B) = P(G) \cdot P_G(B) \Rightarrow P_G(B) = \frac{P(G \cap B)}{P(G)} = \frac{|G \cap B|}{|G|} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} = \frac{0{,}96}{10} = 0{,}096 = 9{,}6$$

Dabei wurde der im Kasten auf Seite 3 gezeigte abgekürzte Weg verwendet.

b) Untersuchung der stochastischen Unabhängigkeit der Ereignisse:
B: Die ausgewählte Person wohnt in Baden-Württemberg.
G: Die ausgewählte Person ist an Grippe erkrankt.

EXKURS über die Stochastische UNABHÄNGIGKEIT.

Man nennt zwei Ereignisse unabhängig, wenn $P(B \cap G) = P(B) \cdot P(G)$ gilt.
Diese Schnittmenge erreicht man über zwei Pfade:

$\xrightarrow{\boxed{P(B)}} B \xrightarrow{\boxed{P_B(G)}} G$ bzw. $\xrightarrow{\boxed{P(G)}} G \xrightarrow{\boxed{P_G(B)}} B$

d.h. $P(B \cap G) = P(B) \cdot P_B(G)$ bzw. $P(B \cap G) = P(G) \cdot P_G(B)$
Vergleicht man die erste dieser drei Gleichungen mit diesen beiden, dann erkennt man, daß die Unabhängigkeit auch durch diese Gleichungen überprüfbar sind:

$$P(G) = P_B(G) \quad \text{bzw.} \quad P(B) = P_G(B)$$

Es gibt also drei Möglichkeiten, die Unabhängigkeit zweier Ereignisse nachzuprüfen.

Untersuchung der Unabhängigkeit mit der Gleichung $P(B \cap G) = P(B) \cdot P(G)$:

$$P(B) = \frac{g}{m} = \frac{\boxed{7}}{\boxed{9}} = \frac{9{,}6}{80} = 0{,}12 \quad \text{und} \quad P(G) = \frac{g}{m} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{9}} = \frac{10}{80} = 0{,}125$$

$$P(B \cap G) = \frac{g}{m} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{9}} = \frac{0{,}96}{80} = 0{,}012$$

Kontrolle: $P(B) \cdot P(G) = 0{,}12 \cdot 0{,}125 = 0{,}015 \neq P(B \cap G)$.

Ergebnis: Die Ereignisse B und G sind stochastisch voneinander abhängig.

c) In Baden-Württemberg werden im Winter 1995/96 Schulen geschlossen, wenn mehr als 15 % ihrer Schüler erkrankt sind. Eine in Baden-Württemberg zufällig ausgewählte Schule hat 100 Schüler.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird diese Schule geschlossen ?

Wir müssen dieser Aufgabe die Grundinformation zugrunde legen, die besagt, daß in Baden-Württemberg 10% (p = 0,1) aller Personen erkrankten.

Zum Zählen den erkrankten Schüler benötigen wir eine **Zufallsvariable X**:
Es sei X die Zahl der erkrankten Schüler.
X ist binomialverteilt mit p = 0,1.
Umfang der Stichprobe: n = 100.

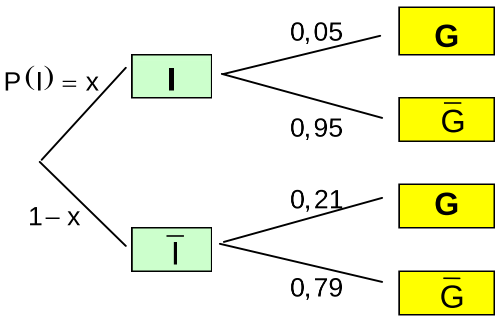
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mehr als 15 Schüler erkrankt ?

$$P(X>15)=1-P(X\le 15)=1-F_B(15;100;0,1)\approx 1-0,9601=0,0399\approx 4\%$$

Ergebnis: Die Schule wird mit der Wahrscheinlichkeit 4 % geschlossen.

d) 5% der geimpften Personen erkrankten dennoch an Grippe. Eine nicht geimpfte Person erkrankt an Grippe mit der Wahrscheinlichkeit 21 %.
Wie viele Bewohner Baden-Württembergs haben sich demnach impfen lassen ?

Wir haben schon das Ereignis G: „Person erkrankt an Grippe“ definiert.
Nun benötigen wir noch I: „Person ist geimpft“.
Laut Aufgabe bezieht sie sich nur auf Baden-Württemberg, daher können wir verwenden: $P(G)=0,1$. Im Baumdiagramm stellt sich diese Situation so dar:



Gesucht ist P(I), das wir mit x bezeichnen.
Und so finden wir x:

Die **totale** Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Person an Grippe erkrankt ist laut Baum: $P(G)=P(I)\cdot P_I(G)+P(\bar{I})\cdot P_{\bar{I}}(G)$

Wir setzen alles ein, was wir bisher wissen;

$$0,1=x\cdot 0,05+(1-x)\cdot 0,21$$
$$0,1=x\cdot 0,05+0,21-0,21\cdot x$$

$$0,16\cdot x=0,11$$
$$x=P(I)=\frac{0,11}{0,16}=\frac{11}{16}\approx 0,6875\approx 69\%$$

Angewandt auf die 9,6 Mill. Einwohner Baden-Württembergs ergibt dies $0,6875\cdot 9,6\text{ Mill.}=6,6\text{ Mill.}$ geimpfte Einwohner.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine in Baden-Württemberg an Grippe erkrankte Person geimpft worden ist ?

Man muß nun erkennen, daß hier wiederum eine Bedingung vorgegeben ist: Die Person ist in Baden-Württemberg erkrankt.
Also ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit gesucht: $P_G(I) = ?$

Dazu zeichnen wir die zur Schnittmenge $G \cap I$ gehörenden beiden Pfade auf:
Diese sind in der Reihefolge vertauscht. Zuerst nehmen wir die an Grippe erkrankten und daraus die zuvor geimpften, und im anderen Pfad zuerst alle geimpften und dann daraus die dennoch erkrankten:

$$\xrightarrow{\boxed{P(G)}} G \xrightarrow{\boxed{P_G(I)}} I \qquad \text{und} \qquad \xrightarrow{\boxed{P(I)}} I \xrightarrow{\boxed{P_I(G)}} G$$

Für den 1. Pfad gilt $P(G \cap I) = P(G) \cdot P_G(I) \;\Rightarrow\; P_G(I) = \dfrac{P(G \cap I)}{P(G)}$

Was ist nun bekannt ?

Wir kennen $P(G) = 0{,}1$ in Baden-Württemberg und wie haben auf Seite 5 berechnet $P(I) = 0{,}6875$, ferner wissen wir; $P_I(G) = 0{,}05$. Aber wir kennen nicht $P(G \cap I)$.

Doch aus dem 2.Pfad folgt: $P(G \cap I) = P(I) \cdot P_I(G) = 0{,}6875 \cdot 0{,}05$
Zusammengesetzt ergibt dies folgende Berechnungsformel:

$$P_G(I) = \frac{P(G \cap I)}{P(G)} = \frac{P(I) \cdot P_I(G)}{P(G)} = \frac{0{,}6875 \cdot 0{,}05}{0{,}1} \approx 0{,}3438$$

Bemerkung: Man kommt zur letzten Formel auch dadurch, daß man ausnützt, daß beide Pfade dasselbe Ereignis darstellen, nämlich $G \cap I$. Also sind die Wahrscheinlichkeiten beider Pfade gleich:

$$P(G) \cdot P_G(I) = P(I) \cdot P_I(G) \;\Rightarrow\; P_G(I) = \frac{P(I) \cdot P_I(G)}{P(G)} = \ldots = 0{,}3438$$

e) Ein Apotheker behauptet:

„Bei mindestens 90% der geimpften Personen bricht die Krankheit nicht aus.“

Ein Arzt findet bei 100 zufällig ausgewählten geimpften Personen 15 Grippekranke. Kann die Behauptung des Apothekers mit einer Irrtums-Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % zurückgewiesen werden ?

Hier liegt ein **Signifikanztest** vor. Es werden die nicht erkrankten geimpften Personen gezählt. Dazu verwenden wir eine neue **Zufallsvariable** Y. Sie ist binomial verteilt.

Die **Nullhypothese** lautet: $H_o: \ p \geq 0,9$.
Es liegt ein **linksseitiger Test** vor, da die Nullhypothese abgelehnt wird, wenn die Anzahl der geimpften und nicht erkrankten Personen zu gering ausfällt.

Ergebnisraum von Y: $S = \left\{ \underbrace{0;1;...;k}_{\bar{A}} \middle| \underbrace{k+1;...;100}_{A} \right\}$

Der Test wird dadurch festgelegt, daß man ein **Signifikanzniveau** von 5 % fordert. Das bedeutet, daß der Fehler 1. Art maximal 5 % sein darf, also

$$P(\bar{A}) \leq 0,05$$

Dies wiederum heißt $\qquad P(Y \leq k) = F_B(k;100;0,9) \leq 0,05$

Da für p > 0,5 die Tabellenwerte durch 1 – a (a = abgelesener Wert) berechnet werden, folgt:

$$1 - a \leq 0,05 \iff a \geq 0,95$$

In einer Tabelle die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung suchen wir und finden:

$$k = 85: \Rightarrow a = 0,9278$$
$$k = 84: \Rightarrow a = 0,9601$$

Man erkennt, daß für $k \leq 84$ die Bedingung erfüllt ist.

Also lautet der Ergebnisraum von Y:

$$S = \left\{ \underbrace{0;1;...;84}_{\bar{A}} \middle| \underbrace{85;...;100}_{A} \right\}$$

Wenn der Arzt 15 geimpfte Grippekranke findet, bedeutet dies 85 geimpfte und nicht erkrankte Personen. Diese Zahl liegt noch im Annahmebereich der Nullhypothese.

Damit kann man also die Nullhypothese nicht verwerfen.