STOCHASTIK
ABITURTRAINING

Abitursaufgabe

Leistungskurs 1986 – 2 / 3 – HT-BG
Baden-Württemberg

Beschreibung
Hervorragend eingekleidete Textaufgabe, die Textverständnis erfordert !
Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängige Ereignisse
Gaußsche Normalverteilung als Näherung für die Binomialverteilung.
Die Solange-Bis-Aufgabe in neuem Gewand !!!
Geometrische Reihe und Logarithmierung einer Ungleichung.

Wertung
Eine Herausforderung für jeden Leistungskurs
Wertung für den Inhalt: 1, als Abitursaufgabe: 1
Schwierigkeitsniveau: Teilweise sehr schwer vom Ansatz her.
Kennen Sie eine bessere Übungsaufgabe dazu ?

Datei Nr. 39203

Friedrich W. Buckel
April 2002

Internatsgymnasium Schloss Torgelow

AUFGABE

Ein Textilunternehmer hat 400 Beschäftigte, darunter 240 Facharbeiter. Wegen schlechter Auftragslage wird das Werk geschlossen, wodurch außer 40 Facharbeitern und weiteren 40 Mitarbeiter alle anderen Beschäftigten arbeitslos werden.

a) Ein Reporter befragt zwei zufällig ausgewählte Personen. Untersuche, ob die folgenden Ereignisse E und F stochastisch unabhängig sind:

E: Der Befragte wird **e**ntlassen.
F: Der Befragte ist **F**acharbeiter.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse:

A: Ein Befragter, der nicht Facharbeiter ist, wird entlassen.
B: Ein Befragter, der nicht arbeitslos ist, ist kein Facharbeiter.

b) Es wird im folgenden angenommen, daß jeder entlassene Facharbeiter mit der Wahrscheinlichkeit 70% innerhalb eines halben Jahres eine neue Stelle bekommt.

Berechne näherungsweise mit der Normalverteilung

(1) die Wahrscheinlichkeit, daß nach einem halben Jahr noch mindestens 55 der 200 entlassenen Facharbeiter arbeitslos sind.

(2) die kleinste Maximalzahl von Facharbeitern, die innerhalb eines halben Jahres mit einer größeren Wahrscheinlichkeit als 0,9 eine neue Stelle vermittelt bekommen.

c) Im folgenden wird angenommen, daß die Stellenvermittlung an Arbeitslose ein Zufallsexperiment ist, bei der jeder Arbeitslose unabhängig von seiner Qualifikation und den Veränderungen des Arbeitsmarktes mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 nach Ablauf eines jeden vollen Monats eine neue Stelle vermittelt bekommt.
X sei die Zufallsvariable „Anzahl der vollen Monate, die ein Arbeitssuchender arbeitslos ist“.
Zeichne ein Baumdiagramm und berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X für $x \in \{0;1;2;3\}$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das ein Arbeitsloser frühestens nach 3 vollen Monaten eine neue Stelle bekommt ?

Ein Arbeitssuchender behauptet: „Ich werde mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit (d.h. $P \geq 0,98$) weniger als m volle Monate Arbeitslos sein.“

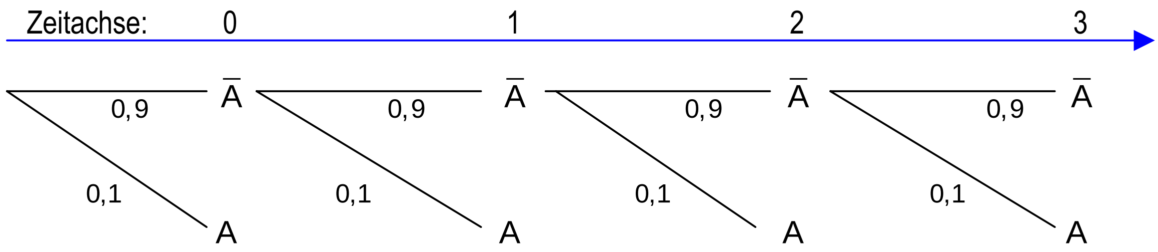
Bestimme $m \in \mathbb{N}$ so, daß seine Behauptung stimmt.

LÖSUNG

Vollständige Lösung auf CD

c) Im folgenden wird angenommen, daß die Stellenvermittlung an Arbeitslose ein Zufallsexperiment ist, bei der jeder Arbeitslose unabhängig von seiner Qualifikation und den Veränderungen des Arbeitsmarktes mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 nach Ablauf eines jeden vollen Monats eine neue Stelle vermittelt bekommt.
X sei die Zufallsvariable „Anzahl der vollen Monate, die ein Arbeitssuchender arbeitslos ist".
Zeichne ein Baumdiagramm und berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X für $x \in \{0;1;2;3\}$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das ein Arbeitsloser frühestens nach 3 vollen Monaten eine neue Stelle bekommt ?

Baumdiagramm: (Dies ist die bekannte „Solange-Bis-Aufgabe" in neuem Gewand!)



$$P(X=0)=0{,}1$$
$$P(X=1)=0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}09$$
$$P(X=2)=0{,}9^2\cdot 0{,}1=0{,}081$$
$$P(X=3)=0{,}9^3\cdot 0{,}1=0{,}0729$$

Frühestens nach 3 Monaten eine neue Stelle heißt

$$P(X\ge 3)=1-P(X\le 2)=1-0{,}1-0{,}09-0{,}081=0{,}729$$

Ein Arbeitssuchender behauptet: „Ich werde mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit (d.h. $P\ge 0{,}98$) weniger als m volle Monate Arbeitslos sein."
Bestimme $m \in \mathbb{N}$ so, daß seine Behauptung stimmt.

In diesem Text steht die Bedingung: $P(X<m)\ge 0{,}98$

d.h. $P(X\le m-1)\ge 0{,}98$

d.h. $P(X=0)+P(X=1)+\ldots+P(X=m-1)\ge 0{,}98$

Es gilt allgemein: $P(X=k)=0{,}9^k\cdot 0{,}1$ (siehe Baumdiagramm).

Also folgt: $0{,}1+0{,}9\cdot 0{,}1+0{,}9^2\cdot 0{,}1+0{,}9^3\cdot 0{,}1+\ldots+0{,}9^{m-1}\cdot 0{,}1\ge 0{,}98$

Die linke Seite ist eine geometrische Reihe mit m Summenden, dem Anfangsglied 0,1 und dem Faktor q = 0,9. Die Reihenformel lautet:

$$s_m = a_1 \cdot \frac{1-q^m}{1-q} = 0{,}1 \cdot \frac{1-0{,}9^m}{1-0{,}9} = 0{,}1 \cdot \frac{1-0{,}9^m}{0{,}1} = 1-0{,}9^m$$

Daher lautet die Bedingung jetzt

$$1-0{,}9^m \geq 0{,}98$$

Daraus folgt: $0{,}9^m \leq 0{,}02$

Wir logarithmieren mit dem Zehnerlogarithmus (lg = Taschenrechner LOG)

$$\lg 0{,}9^m \leq \lg 0{,}02$$

$$m \cdot \lg 0{,}9 \leq \lg 0{,}02$$

WISSEN: Logarithmen von Zahlen zwischen 0 und 1 sind negativ. Wenn wir daher durch lg 0,9 dividieren, kehrt sich die Ungleichungsrichtung um:

$$m \geq \frac{\lg 0{,}02}{\lg 0{,}9} \approx 37{,}1$$

ERGEBNIS: Ab m = 38 (Monaten) stimmt die Behauptung.
d.h. Der Arbeitssuchende wird mit $p \geq 0{,}98$ nach 38 Monaten eine Stelle haben.