

Mathematik

Formelblätter

Remo Waller, Ic01

Inhalt:

Ableitungsregeln	2
Ableitungen elementarer Funktionen	2
Hyperbolische Funktionen	4
Eigenschaften hyperbolischer Funktionen	5
Areafunktionen	6
Komplexe Funktionen	7
Flächen im Raum	8
2D- oder 3D-Grafiken	9
Asymptote	11
Schleifenprogrammierung in Maple	11
Konvergenzkriterien	12
Reihen	12
Reihen / Potenzreihen	13
Konvergenzradius von Potenzreihen	13
Gruppentheorie	14
Matrizen	16

Ableitungsregeln	
Konstante	$[a * f(x)]' = a * f'(x)$
Summenregel	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
Potenzregel	$[f(x^n)]' = n * x^{n-1}$
Produktregel	$[f(x) * g(x)]' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$
Quotientenregel	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g^2(x)}$
	$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$

Ableitungen elementarer Funktionen		
Funktion f(x)		Ableitung f'(x)
Konstante Funktion	$c = \text{const}$	0
Potenzfunktion	$x^n \quad (n \in \mathbb{R})$	$n * x^{n-1}$
Wurzelfunktion	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
	$\cot(x)$	$\frac{1}{-\sin^2(x)}$
Arkusfunktionen	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

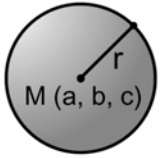
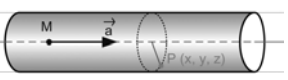
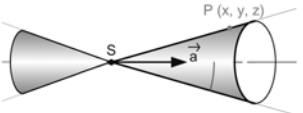
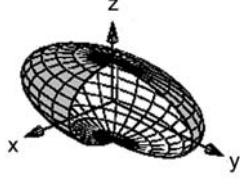
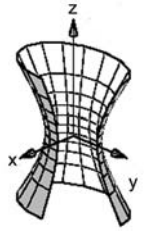

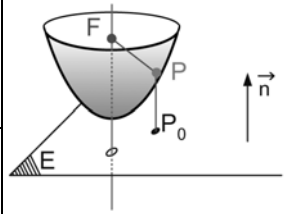
	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$\operatorname{arc\,cot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktion	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
Hyperbelfunktionen	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
	$\tanh(x)$	$\frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
	$\operatorname{coth}(x)$	$\frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = 1 - \operatorname{coth}^2(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$
Areafunktionen	$\operatorname{ar\,sinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad x \in \mathbb{R}$
	$\operatorname{ar\,cosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad x > 1$
	$\operatorname{ar\,tanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2} \quad x < 1$
	$\operatorname{ar\,coth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2} \quad x > 1$

Hyperbolische Funktionen	
Grundfunktionen	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
	$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$
	$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$
Ableitungen	$[\sinh(x)]' = \cosh(x)$
	$[\cosh(x)]' = \sinh(x)$
	$[\tanh(x)]' = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
	$[\coth(x)]' = \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$
Integration	$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$
	$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$
	$\int \tanh(x) dx = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} dx = \int \frac{[\cosh(x)]'}{\cosh(x)} dx = \ln \cosh(x) + C$
	$\int \coth(x) dx = \int \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} dx = \int \frac{[\sinh(x)]'}{\sinh(x)} dx = \ln \sinh(x) + C$

Eigenschaften hyperbolischer Funktionen	
	$\cosh(-x) = \cosh(x)$
	$\sinh(-x) = -\sinh(x)$
	$\tanh(-x) = -\tanh(x)$
	$\sinh(x) + \cosh(x) = e^x$
	$\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$
	$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
	$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \frac{1}{2} * (e^{2x} + e^{-2x})$
	$2 * \cosh(x) * \sinh(x) = \sinh(2x)$
Additionstheoreme	$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh(\alpha) * \cosh(\beta) + \cosh(\alpha) * \sinh(\beta)$
	$\sinh(\alpha - \beta) = \sinh(\alpha) * \cosh(\beta) - \cosh(\alpha) * \sinh(\beta)$
	$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i * \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i * \sin x \end{aligned}$
	$e^{ix} - e^{-ix} = 2 * i \sin x$
	$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2 * i} = \frac{\sinh(ix)}{i}$
	$i * \sin(x) = \sinh(ix)$

Areafunktionen	
Grundfunktionen	$\operatorname{ar sinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
	$\operatorname{ar cosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
	$\operatorname{ar tanh}(x) = \frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad x < 1$
	$\operatorname{ar coth}(x) = \frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) \quad x > 1$
Ableitungen	$[\operatorname{ar sinh}(x)]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad x \in \mathbb{R}$
	$[\operatorname{ar cosh}(x)]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad x > 1$
	$[\operatorname{ar tanh}(x)]' = \frac{1}{1-x^2} \quad x < 1$
	$[\operatorname{ar coth}(x)]' = \frac{1}{1-x^2} \quad x > 1$
Integration	$\int \operatorname{ar sinh}(x) dx = x * \operatorname{ar sinh}(x) - \sqrt{x^2 + 1} + C$
	$\int \operatorname{ar cosh}(x) dx = x * \operatorname{ar cosh}(x) - \sqrt{x^2 - 1} + C$
	$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} * \ln\left \frac{1+x}{1-x}\right + C$

Komplexe Funktionen	
Komplexes Polynom vom Grade n	$\underline{\omega} = f(\underline{z}) = \underline{c}_0 + \underline{c}_1 * \underline{z} + \underline{c}_2 * \underline{z}^2 + \dots + \underline{c}_n * \underline{z}^n \quad n \in \mathbb{N}, \underline{c}_i \in \mathbb{C}$
Rationale algebraische Funktionen	$\underline{\omega} = \frac{P(\underline{z})}{Q(\underline{z})} \quad P(\underline{z}), Q(\underline{z}) : \text{komplexe Polynome}$
Exponentialfunktionen $z=x+i*y$	$\underline{\omega} = e^z = e^{x+iy} = e^x * e^{iy} = e^x * (\cos y + i * \sin y)$
Trigonometrische Funktionen	$\cos(\underline{z}) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
	$\sin(\underline{z}) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2 * i}$
Hyperbolische Funktionen	$\cosh(\underline{z}) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
	$\sinh(\underline{z}) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
Logarithmische Funktionen	$\underline{z} = e^{\underline{\omega}} = r * e^{i\varphi} = r * e^{i(\varphi+2k\pi)}$ $\underline{\omega} = \ln(\underline{z}) = \ln(r * e^{i(\varphi+2k\pi)})$ $\ln r + \ln e^{i(\varphi+2k\pi)}$ $\ln r + i * (\varphi + 2k\pi)$
Area-Funktionen	$\operatorname{ar sinh}(\underline{z}) = \ln(\underline{z} + \sqrt{\underline{z}^2 + 1})$
	$\operatorname{ar cosh}(\underline{z}) = \ln(\underline{z} + \sqrt{\underline{z}^2 - 1})$
	$\operatorname{ar tanh}(\underline{z}) = \frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+\underline{z}}{1-\underline{z}}\right)$
	$\operatorname{ar coth}(\underline{z}) = \frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+\underline{z}}{\underline{z}-1}\right)$
Trigonometrische Umkehrfunktionen	$\arcsin(\underline{z}) = \frac{1}{i} * \ln(i\underline{z} + \sqrt{1-\underline{z}^2})$
	$\arccos(\underline{z}) = \frac{1}{i} * \ln(\underline{z} + \sqrt{\underline{z}^2 - 1})$
	$\arctan(\underline{z}) = \frac{1}{2i} * \ln\left(\frac{1+i\underline{z}}{1-i\underline{z}}\right)$
	$\operatorname{arc cot}(\underline{z}) = \frac{1}{2i} * \ln\left(\frac{\underline{z}+1}{\underline{z}-1}\right)$

Flächen im Raum					
Körper	Gleichungen		EW1	EW 2	EW 3
Kugel	$ \vec{MP} = r$				
	$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$				
Zylinder	$ \vec{a} \times \vec{MP} = \vec{a} \cdot r$				0
Kegel	$\vec{a} \cdot \vec{SP} = \vec{a} \cdot \vec{SP} \cdot \cos \varphi$				
	$(\vec{a} \cdot \vec{SP})^2 = \vec{a} ^2 \cdot \vec{SP} ^2 \cdot \cos^2 \varphi$				
Rotationsellipsoid	$ \vec{F_1P} + \vec{F_2P} = \text{const} = \delta$				
	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$				
Rotationshyperboloid einschalig	$ \vec{F_1P} - \vec{F_2P} = \text{const} = \delta$				
	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$				
Rotationshyperboloid zweischalig	$ \vec{F_1P} - \vec{F_2P} = \text{const} = \delta$				
	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$				
Rotationsparaboloid	$ \vec{FP} = \frac{ \vec{P_0P} \cdot \vec{n} }{ \vec{n} }$	 <p>$P_0 \in E$ (nicht senkrecht zu P)</p>			
	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z$				

2D- oder 3D-Grafiken		
Abbildung	Matrix	Gleichungssystem
Identische Matrix	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$x' = x$ $y' = y$
Spiegelung an der y-Achse	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$x' = -x$ $y' = y$
Spiegelung an der $z = 0$ – Ebene (Fussboden)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$x' = x$ $y' = y$ $z' = -z$
Spiegelung am Nullpunkt	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$x' = -x$ $y' = -y$ $z' = -z$
Translation	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$	$x' = x + a$ $y' = y + b$ $z' = z + c$
Streckung vom Ursprung aus	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	
Streckung in y-Richtung	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Scherung längs der y-Achse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$x' = x$ $y' = y + az$ $z' = z$
Allg. Drehmatrix in der Ebene	$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$	

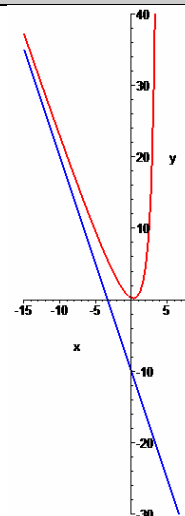
Rotation um x-Achse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$	
Rotation um y-Achse	$\begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$	
Rotation um z-Achse	$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Vorgehen bei Spiegelaufgaben Spiegelung an Gerade Spiegelung an Ebene	<p>1. Punkte und Spiegelbilder bestimmen (Ebene: 2 Punkte, Raum: 3 Punkte und Spiegelpunkte)</p> <p>2. leere Matrix definieren</p> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ <p>3. Alle Spiegelbilder mittels Matrix berechnen</p> <p>4. Matrizenkomponenten berechnen</p>	$P1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad P2^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P3^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $A * P1 = P1^*$ $A * P2 = P2^*$ $A * P3 = P3^*$
Vorgehen bei Drehungen um Punkt: in der Ebene im Raum	<p>Bsp: Drehung um P(2/2) mit 45°</p> <p>1. Verschiebung von P(2/2) in den Nullpunkt</p> <p>2. Drehung um 45°</p> <p>3. zurückverschieben vom Drehzentrum (0/0) zu P(2/2)</p>	$\varphi = 45^\circ$ $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Asymptote

Asymptoten bestimmen

Steigung $a = \lim_{x \rightarrow \infty} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

Verschiebung $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - a \cdot x]$



Schleifenprogrammierung in Maple

Integral muss 1 sein

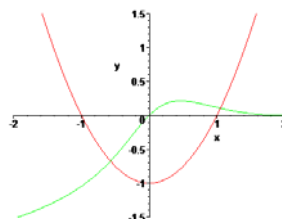
```
> f:=x->(1-x/2)^2*arctan(x/(x^2+1));
```

$$f := x \rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 \arctan\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

```
> g:=(b,x)->x^2+b;
```

$$g := (b, x) \rightarrow x^2 + b$$

```
> plot({f(x), g(-1,x)}, x=-2..2, y=-1.5..1.5);
```



```
> for b from -0.907 to -0.904 by 0.001 do
'B' = b;
xa := fsolve(f(x) = g(b,x), x=-10..0);
xb := fsolve(f(x) = g(b,x), x=0..5);
flaeche:= int(f(x)-g(b,x), x=xa..xb);
'Differenz' = flaeche-1;
"-----";
end do;
```

```
B = -0.907
xa := -5.292095939
xb := 1.010222336
flaeche := 1.002091524
Differenz = .002091524
"-----"
B = -0.906
xa := -5.287453440
xb := 1.009777982
flaeche := 1.000552546
Differenz = .000552546
"-----"
B = -0.905
xa := -5.282809855
xb := 1.009333466
flaeche := .9990144772
Differenz = -.0009855228
"-----"
B = -0.904
xa := -5.278165184
xb := 1.00888786
flaeche := .9974773173
Differenz = -.0025226827
"-----"
```

Konvergenzkriterien		
Quotientenkriterium	$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right $	$\alpha < 1$: konvergent $\alpha > 1$: divergent
Wurzelkriterium	$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }$	$\alpha = 1$: keine Aussage
Integralkriterium	Eine Reihe ist konvergent, wenn das Ungeigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x) dx$ existiert	
Leibnizkriterium	Eine alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, wenn die Folge $\langle a_n \rangle$ monoton gegen null abfällt.	

Reihen		
MacLaurin-Reihe	In der Umgebung von 0 beliebig oft differenzierbare Funktion:	
	$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$	MacLaurin-Koeffizienten
	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n * x^n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} * x^n$	MacLaurin-Funktion
Taylor-Reihe	In der Umgebung von x_0 beliebig oft differenzierbar:	
	$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$	Taylor-Koeffizienten
	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n * x^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} * (x - x_0)^n$	Taylor-Funktion
Binominal-Reihe	$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} * x^n$ $= 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots$	
	$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha * (\alpha - 1) * \dots * (\alpha - n + 1)}{1 * 2 * 3 * 4 * \dots * n}$	Binominalkoeffizienten

Reihen / Potenzreihen		
Reihe	$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 * 3^n$	
	Konvergenz... ?	Ja / Nein
	... bestimmen mittels:	<ul style="list-style-type: none"> - Quotienten- - Wurzel- - Leibniz- - Integralkriterium
Potenz-Reihe	$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 * 3^n * x^n$	
	Konvergenz... ?	Ja, für $ x < \varphi$ Nein, für $ x > \varphi$
	... bestimmen mittels:	$\varphi = \text{Konvergenzradius}$ $= \frac{1}{\alpha}$

Konvergenzradius von Potenzreihen		
Grenzwertformel	Grenzwert	Konvergenzradius
$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }$ (oder anderes Kriterium, um den Grenzwert zu bestimmen)	α	$\varphi = \frac{1}{\alpha}$
	$\alpha = \infty$ (Grenzwert existiert nicht)	$\varphi = 0$
	$\alpha = 0$ (Grenzwert existiert)	$\varphi = \infty$
	$\alpha \neq 0$ und $\alpha \neq \infty$	konvergiert für: $ \varphi < \frac{1}{\alpha}$ divergiert für: $ \varphi > \frac{1}{\alpha}$

Gruppentheorie	
Definition	<p>Eine nicht leere Menge G zusammen mit einer Verknüpfungsvorschrift \circ heisst Gruppe, wenn:</p> <ol style="list-style-type: none"> $(a \circ b) \in G \quad \forall a, b \in G$ $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a, b, c \in G$ Es existiert ein Neutralelement Zu jedem $a \in G$ existiert ein inverses Element $a^{-1} \in G$ mit $a \circ a^{-1} \in G$
Eigenschaften von Gruppen	<ol style="list-style-type: none"> $a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c$ [Wegstreichregel] Die Gleichung $a \circ x = b$ ist eindeutig lösbar $(a^{-1})^{-1} = a$ $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$
Abelsch, kommutativ	<p>Eine Gruppe heisst abelsch oder kommutativ, wenn gilt: $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in G$</p> <p>Abelsche Matrizen sind symmetrisch.</p>
Untergruppe	<p>(G, \circ) ist eine Gruppe. Eine Untergruppe (H, \circ) ist eine Teilmenge $H \subset G$ welche mit derselben Verknüpfungsvorschrift eine Gruppe bildet. Damit muss die Untergruppe die Definition und Eigenschaften von Gruppen erfüllen.</p> <ul style="list-style-type: none"> - die ganze Gruppe ist eine Untergruppe jeder Gruppe - das Neutralelement ist von jeder Gruppe eine Untergruppe
Zyklisch	<p>Eine Gruppe (G, \circ) heisst zyklisch, wenn es ein Element $a \in G$ gibt, so dass jedes Element $x \in G$ dargestellt werden kann durch $x = a^m \quad \text{für } m \in \mathbb{Z}$.</p> <p>$a$ heisst dann erzeugendes Element.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Jede zyklische Gruppe ist abelsch! - Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist ebenfalls zyklisch!
Homomorphismus	<p>Gegeben: 2 Gruppen (G_1, \circ) und (G_2, \bullet). Eine Abbildung heisst Homomorphismus, wenn:</p> $g(x \circ y) = g(x) \bullet g(y) \quad \forall x, y \in G_1$ <p>Ist g zudem bijektiv (jedem Element wird genau 1 Element zugeordnet), so heisst die Abbildung Isomorphismus. Diese Gruppen sind isomorph \cong.</p>

Körper und Ringe

Eine Menge G mit **2 Verknüpfungsvorschriften** \oplus und \bullet heisst Ring, wenn:

- (G, \oplus) ist abelsche Gruppe
- \bullet ist assoziativ: $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$
- Distributivgesetz: $(a \oplus b) \bullet c = ac \oplus bc$
- Existiert ein **Neutralelement** bezüglich der **Multiplikation**, d.h. $e \bullet a = a$, so sprechen wir von einem **Ring mit eins**.
- Ist die **Multiplikation kommutativ (symmetrische Matrix)**, so sprechen wir von einem **kommutativen Ring**
- Bildet **G ohne das Neutralelement bezüglich \oplus bezüglich \bullet eine Gruppe**, so sprechen wir von einem **Schiefkörper (Divisionsring)**.
- Ein **kommutativer Divisionsring** heisst **Körper**.

Bsp: Restkörper modulo 3:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Streicht man nun in der Multiplikations-Verknüpfungstabelle das Neutralelement bzgl. der Addition (hier 0), so erhält man eine Gruppe. Dies wäre ein Schiefkörper (Divisionsring). Da dieser Divisionsring noch kommutativ ist, ist es ein Körper.

Allgemein kann man sagen:

Alle Restklassen modulo „Primzahl“ sind Körper!

Matrizen		
Fachbereich	Eigenschaft	Bemerkungen
Matrizen	$(A * B)^T = B^T * A^T$ $(B * A)^T = A^T * B^T$ $(A^T)^T = A$ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ $(A + B)^T = A^T + B^T$	
Determinanten	$ A * B = A * B $ $ B * A = B * A $ $ A^T = A $ $ A * B ^T = A ^T * B ^T$ $ = A * B $ $ A^T - B^T = A - B $ $ (A - B)^T = A - B $ $ (A^T * B^T)^T = A * B $	
Lösungen	$a * x = b$ $x = \frac{b}{a}$	<ul style="list-style-type: none"> - genau 1 Lösung, falls $a \neq 0$ - ∞ -viele Lösungen, falls $a = 0$ und $b = 0$ - keine Lösung, falls $a = 0$ und $b \neq 0$