

Stochastik Kapitel 5: Zufallsvariable und Bildmodelle

Thomas Hellstern
FH Nordwestschweiz

20. Januar 2004

1 Zufallsvariable und messbare Abbildungen

Zufallsvariablen wurden bereits im Abschnitt 2.6 eingeführt, da die Zufallsvariablen im Kapitel 5 des Buches im Mittelpunkt stehen, möchte ich wie wichtigen Begriffe nochmals herleiten.

Definition: Unter einer Zufallsgrösse oder **Zufallsvariablen** X verstehen wir eine Funktion, die jedem Elementarereignis ω aus der Ergebnismenge Ω eines Zufallsexperiments genau eine reelle Zahl $x(\omega)$ zuordnet.

Mathematisch sieht das wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\Omega &\rightarrow \Omega' \\ \omega &\mapsto X(\omega)\end{aligned}$$

Wir unterscheiden zwischen *diskreten* und *stetigen* Zufallsvariablen.

Eine Zufallsvariable X heisst dabei *diskret*, wenn sie nur *endlich* viele oder *abzählbar unendlich* viele Werte annehmen kann.

Eine Zufallsvariable X heisst dagegen *stetig*, wenn sie *jeden* beliebigen Wert aus einem (reellen) endlichen oder unendlichen *Intervall* annehmen kann.

Beispiel: Augenpaare beim Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln

Wir würfeln gleichzeitig mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln, z.B. mit einem roten und einem grünen Würfel und notieren dabei die erzielten Augenpaare.

- Ein mögliches Ergebnis ist dann beispielsweise: roter Würfel=6, grüner Würfel=1
- Dieses Elementarereignis beschreiben wir durch das geordnete Zahlenpaar $(6; 1)$. Insgesamt gibt es dann $6^2 = 36$ verschiedene Augenpaare oder Elementarereignisse.
- Sie bilden in ihrer Gesamtheit den Merkmalraum $\Omega = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), \dots, (6; 5), (6, 6)\}$
- Die durch $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$ definierte ZV $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ mit Bildmenge (Wertemenge) $\Omega' := \{2, 3, 4, \dots, 12\}$ beschreibt den Zusammenhang „Summe der Augenzahlen der beiden Würfel“.

Definition: Für jede Abbildung X heisst $A := \{X \in A'\}$ das Urbild von A' . Man schreibt dafür auch $X^{-1}(A')$. Die Zuordnung $A' \mapsto X^{-1}(A') = \{X \in A'\}$ von $\mathcal{P}(\Omega')$ nach $\mathcal{P}(\Omega)$ heisst deshalb die **Urbildfunktion** X^{-1} .

Man beachte, dass X^{-1} eine Mengenabbildung ist und immer definiert ist, im Gegensatz zu der nicht immer existierenden Umkehrfunktion.

Beispiel: Augenpaare beim Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln

Die betrachtete Zufallsvariable X ist die Summe der Augenzahlen nach einem Wurf.

$$\begin{aligned}X^{-1}(2) &= \{(1; 1)\}, \\X^{-1}(3) &= \{(1; 2), (2; 1)\}, \\X^{-1}(4) &= \{(1; 3), (2; 2), (3; 1)\}, \\&\dots \\X^{-1}(12) &= \{(6; 6)\}\end{aligned}$$

2 Hypergeometrische und Binomial-Modelle

2.1 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung findet überall dort Anwendung, wo alternative Entscheidungen zu treffen sind wie z.B. beim Münzwurf (Alternative: „Kopf“ oder „Zahl“) oder bei der Qualitätskontrolle (Alternative: „Einwandfrei“ oder „Ausschuss“).

Definition:

Ein Bernoulli-Experiment mit den beiden sich gegenseitig ausschliessenden Ergebnissen (Ereignissen) A und \bar{A} werde n -mal nacheinander ausgeführt (sogenanntes mehrstufiges Bernoulli-Experiment vom Umfang n). Dann genügt die diskrete Zufallsvariable

X = Anzahl der Versuche, in denen das Ereignis A eintritt

der sog. Binomialverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n)$$

und der zugehörigen Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \quad (k \geq 0)$$

(für $x < 0$ ist $F(x) = 0$). n und p sind dabei die Parameter der Binomialverteilung.

Dabei bedeuten:

- p := Konstante Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A beim Einzelversuch ($0 < p < 1$)
- q := Konstante Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des zu A komplementären Ereignisses \bar{A} beim Einzelversuch ($q = 1 - p$)
- n := Anzahl der Ausführungen des Bernoulli-Experiments

Die Binomialverteilung ist durch die beiden Parameter n und p vollständig bestimmt und wird daher häufig durch das Symbol $\mathcal{B}(n, p)$ gekennzeichnet.

2.2 Hypergeometrische Verteilung

In den Anwendungen wird häufig eine spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilung benötigt, die unter der Bezeichnung hypergeometrische Verteilung bekannt ist. Sie spielt bei den Qualitäts- und Endkontrollen eines Herstellers oder den Abnahmekontrollen eines Kunden eine grosse Rolle. Bei der

Herleitung dieser diskreten Verteilung greifen wir wiederum auf das anschauliche Urnenmodell zurück, das uns bereits bei der Binomialverteilung so nützlich war.

Definition:

- N := Gesamtheit
- M := Teilmenge von N mit bestimmten Merkmal
- n := Stichprobe
- k := "Defekte" in der Stichprobe

$$h(N, M, n, x) = P(X = x) = \frac{g}{m} = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Herleitung der hypergeometrischen Verteilung am Urnenmodell

In einer Urne befinden sich N Kugeln, darunter M rote und $N-M$ grüne Kugeln. Nacheinander entnehmen wir ganz zufällig n Kugeln und interessieren uns dabei für die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter diesen Kugeln genau x rote Kugeln befinden.

Die Lösung unserer Aufgabe hängt dabei noch ganz wesentlich davon ab, ob die Ziehung der Kugeln mit oder ohne Zurücklegen erfolgt. Bei einer Ziehung mit Zurücklegen ist die Zufallsvariable:

X = Anzahl der roten Kugeln unter den n gezogenen Kugeln

binomialverteilt mit den Parametern n und $p = M/N$.

Wird dagegen ohne Zurücklegen gezogen, so hat die Zufallsvariable X eine hypergeometrisch Verteilung.

Schrittweises Vorgehen:

1. Wir entnehmen der Urne nacheinander n Kugeln ohne Zurücklegen. Dies ist auf genau $m = \binom{N}{n}$ verschiedene Arten möglich. Denn es handelt sich dabei um Kombinationen n -ter Ordnung von N Elementen (Kugeln) ohne Wiederholung.
2. Unter den n gezogenen Kugeln sollen sich genau x rote Kugeln befinden. Diese müssen daher aus den insgesamt M roten Kugeln der Urne stammen. Bekanntlich können wir aber aus M Elementen (rote Kugeln) x Elemente auf genau $g_1 = \binom{M}{x}$ verschiedene Arten auswählen.
3. Unter den n gezogenen Kugeln befinden sich genau $n-x$ grüne Kugeln. Sie entstammen den $N-M$ grünen Kugeln der Urne und können auf $g_2 = \binom{N-M}{n-x}$ verschiedene Arten gezogen werden.

4. Somit gibt es genau $g = g_1 \cdot g_2 = \binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}$ verschiedene Möglichkeiten, der Urne n Kugeln so zu entnehmen, dass sich darunter genau x rote und daher $n-x$ grüne Kugeln befinden. Setzen wir diese Anzahl der für das Ereignis $X=x$ günstigen Fälle ins Verhältnis zur Anzahl $m = \binom{N}{n}$ der insgesamt möglichen Fälle, so erhalten wir die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion der sogenannten hypergeometrischen Verteilung:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{g}{m} = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

($x=0,1,2,\dots,n$)

3 Die Poisson-Approximation der Binomial-Verteilung

Einleitende Bemerkung: Die Poisson-Verteilung wird im Buch bereits in Kapitel 3.1 eingeführt.

Die Poisson-Verteilung lässt sich aus der Binomialverteilung für den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0$ herleiten, wobei vorausgesetzt wird, dass dabei der Mittelwert $\mu = np$ konstant bleibt. Wir folgern daraus: Die Binomialverteilung mit den Parametern n und p darf für grosses n und kleines p in guter Näherung durch die rechnerisch bequemere Poisson-Verteilung mit dem Parameter (Mittelwert) $\mu = np$ ersetzt werden.

Dabei gilt folgende **Faustregel**:

Die Binomialverteilung darf näherungsweise durch die Poisson-Verteilung ersetzt werden, wenn die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} np &< 10 \\ n &> 100p \end{aligned}$$

erfüllt sind.

4 Die Normal-Approximation der Binomial-Verteilung

Die Frage nach einer Approximation für die Binomialverteilung bei grossen Werten von n wurde im letzten Abschnitt nur für p -Werte in der Nähe von 0 oder 1 beantwortet. In den übrigen Fällen bietet sich die Approximation durch die Normalverteilung an. Diese beruht auf der Einführung des zentralen Grenzwertsatzes:

Definition: Zentraler Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ seien *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable, die alle der gleichen Verteilungsfunktion mit dem Mittelwert μ und der Varianz σ^2 genügen. Dann konvergiert die Verteilungsfunktion $F_n(u)$ der standardisierten Zufallsvariablen

$$U_n = \frac{(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n\sigma}}$$

im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ gegen die Verteilungsfunktion $\Phi(u)$ der Standardnormalverteilung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) = \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^u e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Damit kann die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung bei grossen Werten von n durch die Normalverteilung approximiert werden.

Anmerkung: Die formelle und eigentliche Einführung des zentralen Grenzwertsatzes erfolgt im Buch auf Seite 117.