Theoretische Analyse von Spielen

Wahrscheinlichkeit

1. Einführendes Beispiel: Münzenwurf
2. Verallgemeinerung: Wahrscheinlichkeitsfunktion, Erwartungswert
3. Mehrstufige Prozesse

Anwendung auf Spiele

4. Würfelspiele
5. Kartenspiel
6. Andere Spiele

1. Einführendes Beispiel: Münzenwurf

Jeder Wurf einer (oder mehrerer) Münzen führt zu einem Ereignis.

Jedes dieser Ereignisse tritt, sofern ideale Münzen verwendet werden, mit der gleichen Chance (in %) auf.

Anstelle von „Chance“ wird der Begriff „Wahrscheinlichkeit“ oder „Probability“, abgekürzt P, verwendet.

P(„Kopf“)=0.5 und P(„Zahl“)=0.5

2. Verallgemeinerung: Wahrscheinlichkeitsfunktion, Erwartungswert

Anstelle der verbalen Beschreibungen von Ereignissen werden für die Merkmale bzw. Merkmalsausprägungen, meist Zahlen verwendet, sie können als Realisationen einer Zufallsvariable betrachtet werden:

X – Augenzahl beim Wurf eines Würfels
Y – Augenzahl beim Wurf zweier Würfel
Z – Ergebnis des Münzenwurfs, z.B. 0 für Kopf und 1 für Zahl
W – Anzahl der wartenden Kunden vor einem Schalter
usw.

Jedem möglichen Wert x_i einer Zufallsvariablen X ist nun eine Chance bzw. eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.
Diese Wahrscheinlichkeit ist eine Zahl zwischen 0 und 1.

Die tabellarische Zusammenstellung der Merkmalsausprägungen und der zugehörigen Wahrscheinlichkeit ist nicht anderes als die Darstellung einer diskreten Funktion, z.B. für den Würfel:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Anstelle einer Tabelle kann die Wahrscheinlichkeitsfunktion auch als Rechenvorschrift (Formel) vorgegeben werden, z.B.:

$$P(X = k) = \frac{2 \cdot k}{n \cdot (n+1)} \qquad \text{für } k=1, 2, 3, \ldots, n$$

Aber: Nicht jede Zuordnung von Zahlen zu den Merkmalsausprägungen stellt eine Wahrscheinlichkeitsfunktion dar!

Kriterien für Wahrscheinlichkeitsfunktion?

1. Eine Wahrscheinlichkeit ist nie negativ, d.h. P(X=x)   0
2. Eine Wahrscheinlichkeit ist nie grösser als 1, d.h. P(X=x)   1
3. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte x_i für die Zufallsvariable X aufsummiert ergibt 1.
4. Das Ereignis x heisst sicher, wenn P(X=x)=1, bzw. unmöglich, wenn P(X=x)=0

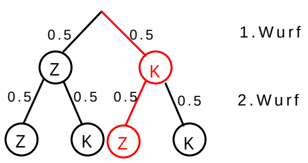
Das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten:

Sind die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte x_i bekannt, so können auch Wahrscheinlichkeiten für zusammengesetzte Ereignisse berechnet werden:

Illustration: Würfelbeispiel, X - Augenzahl

P(„X ist gerade") = P(X=2)+P(X=4)+P(X=6) = 1/2

Illustration: 2 maliges Werfen einer Münze
P(Kopf im 1. Wurf und Zahl im 2. Wurf) = ?



Wahrscheinlichkeitsbaum:

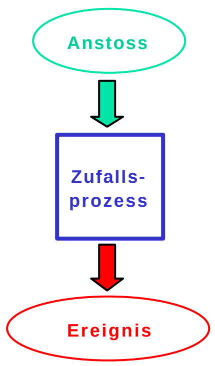
Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes „Blatt" ist gleich dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades von der Wurzel bis zu diesem Blatt.

Gehorcht ein Zufallsprozess einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsfunktion (auch Wahrscheinlichkeitsverteilung genannt), so kann auch der Mittelwert von N Durchführungen theoretisch bestimmt werden:

Die N Durchführungen werden sich theoretisch auf die Ereignisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verteilen:

Ereignis	Absolute Häufigkeit
x_1	$N \cdot P(X = x_1)$
x_2	$N \cdot P(X = x_2)$
...	...
x_n	$N \cdot P(X = x_n)$

Stochastischer Prozess



Für einen Würfel werden sich von total N=60 Würfen die theoretisch absoluten Häufigkeiten von je 60/6 = 10 ergeben. In jedem Fall summieren sich die absoluten Häufigkeiten zu N auf.

Ereignis	Absolute Häufigkeit
x_1	$N \cdot P(X = x_1)$
x_2	$N \cdot P(X = x_2)$
...	...
x_n	$N \cdot P(X = x_n)$

Der theoretische Mittelwert ergibt sich zu:

$$\frac{x_1 \cdot \left(N \cdot P(X = x_1)\right) + x_2 \cdot \left(N \cdot P(X = x_2)\right) + \ldots + x_n \cdot \left(N \cdot P(X = x_n)\right)}{N}$$
$$= x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$$

Dieser theoretische Mittelwert wird natürlich nie exakt erreicht; erst wenn die Zahl N der Durchführungen extrem gross wird und gegen unendlich strebt, kann die Gleichheit von beobachtetem und theoretischem Wert erwartet werden. Der theoretische Wert wird deshalb Erwartungswert genannt und mit E(X) bezeichnet.

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$$

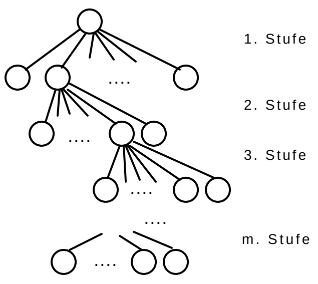
Illustration: Würfelbeispiel, X - Augenzahl

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

3. Mehrstufige Prozesse

Ein Zufallsprozess kann oft in mehrere Teilprozesse zerlegt werden. Die Bearbeitungszeit z.B. eines Projekts setzt sich aus den Zeiten für die einzelnen Projektphasen zusammen. Die Bearbeitungszeiten für jede Phase können je durch eine Zufallsvariable mit einer entsprechenden Wahrscheinlichkeitsfunktion modelliert bzw. simuliert werden.



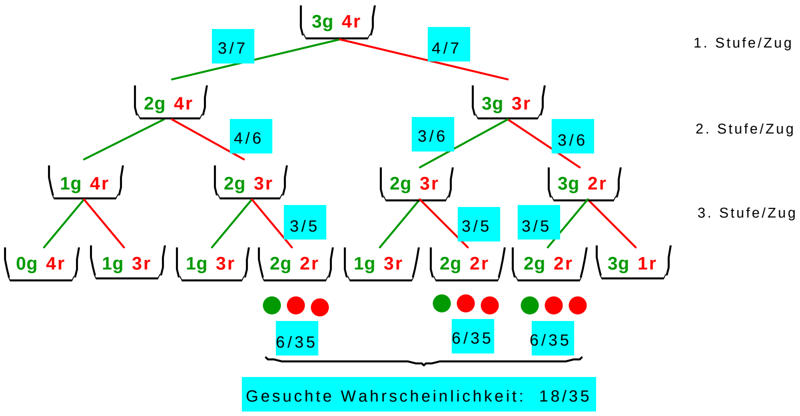
„Wahrscheinlichkeitsbaum"

A. Die aller Wahrscheinlichkeiten einer Stufe ergeben zusammen 1.

B. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, das sich durch einen Pfad von der Wurzel bis zu einem Blatt definiert, errechnet sich als Produkt aller Wahrscheinlichkeiten entlang der zugehörigen Kanten.

Illustration

Eine Urne enthält 3 grüne und 4 rote Kugeln. Es werden nacheinander 3 Kugeln gezogen, ohne dass sie zurückgelegt werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass 1 grüne und 2 rote Kugeln gezogen werden?



Theoretische Analyse von Spielen

Wahrscheinlichkeit

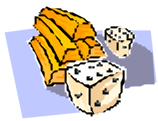
1. Einführendes Beispiel: Münzenwurf
2. Verallgemeinerung: Wahrscheinlichkeitsfunktion, Erwartungswert
3. Mehrstufige Prozesse

Anwendung auf Spiele

4. Würfelspiele
5. Kartenspiel
6. Andere Spiele

4. Würfelspiele

Zwei Würfel werden miteinander geworfen. Für eine Augensumme 10 und 11 werden Fr. 10 und für die Augensumme 12 werden Fr. 20 ausbezahlt. Wie gross muss der Einsatz in den übrigen Fällen sein, wenn das Spiel fair sein soll?



Die Augensummen der Einzelereignisse:

1.W. \ 2. W.	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Die Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse:

1.W. \ 2. W.	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Ein Gewinn von Fr. 10 wird in vier Fällen und Fr. 20 wird in einem Fall ausbezahlt. Die Wahrscheinlichkeit für jeden der 36 Einzelfälle ist gleich gross: 1/36.

Anstelle der Augensumme als Zufallsvariable kann nun die neue Zufallsvariable Z der Aus- bzw. Einzahlung mit folgender Wahrscheinlichkeitsfunktion betrachtet werden:

$Z=z_i$	a	+10	+20
p_i	31/36	4/36	1/36

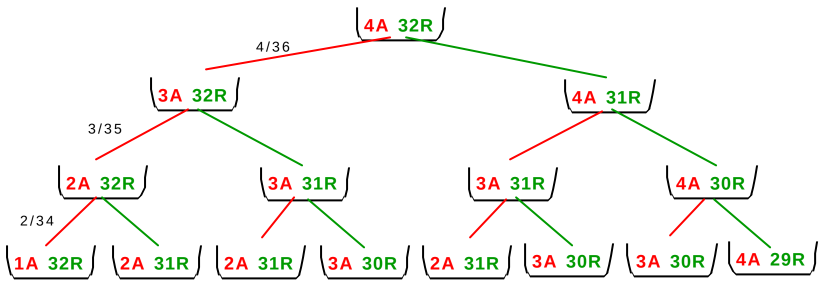
Damit das Spiel fair ist, muss der Erwartungswert der Zufallsvariablen Z gleich 0 sein:

$$E(Z) = a \cdot \frac{31}{36} + 10 \cdot \frac{4}{36} + 20 \cdot \frac{1}{36} = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{60}{31} \approx -2$$

5. Kartenspiele

Aus einem Kartenpaket mit 36 Spielkarten werden 3 Karten gezogen. Wie gross ist die Chance, dass drei der vier Asse gezogen werden?



3 Asse

$$P(\text{"3 Asse"}) = \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} \cdot \frac{2}{34} = \frac{1}{1785}$$

6. Andere Spiele

Beim Roulette wird eine Kugel in eine Schale geworfen und bleibt nach dem Stillstand in einem der von 0 bis 36 durchnummerierten Felder liegen. Die Spieler setzen im Voraus auf einem Spielteppich ihren Einsatz. Je nach gesetztem Feld wird dieser Einsatz bei richtig gewähltem Feld oder Felderkombination als Viel-faches ausbezahlt.

Gewinnplan für

Plein (1 volle Nummer)	35 fach
gerade Nummer	1 fach
usw.	

Nehmen wie einmal an, ein Spieler setze immer den gleichen Einsatz e auf die gleiche Zahl. Welchen Nettogewinn G kann er auf die Dauer mit dieser Spielstrategie erwarten?

Die gewählte Zahl sei k, die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist 1/37. Der Nettogewinn G ist eine Zufallsvariable:

$G = g_i$	-e	+34e
p_i	36/37	1/37

$$E(G) = (-e) \cdot \frac{36}{37} + (34e) \cdot \frac{1}{37} = \frac{1}{37} \cdot (-36e + 34e) = \frac{-2e}{37} < 0$$

Der Erwartungswert ist negativ, d.h. auf die Dauer verliert dieser Spieler 2/37 oder 5.4% seiner getätigten Einsätze.

Zusammenfassung

- Wahrscheinlichkeit
- Erwartungswert
- faires Spiel
- Wahrscheinlichkeitsfunktion
- Kriterien an eine Wahrscheinlichkeitsfunktion
- Wahrscheinlichkeitsbaum
- mehrstufiger Zufallsprozess
- Roulette